Markov-Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen und dem Durchschnittsgewinn-Kriterium: Ausgewählte Probleme

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker
Ronald Schurath
geboren am 11.02.1970 in Dresden

Gutachter: Prof. Dr. Heinz-Uwe Küenle

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Rieder

Gutachter: Prof. Dr. Hans-Joachim Girlich

Tag der mündlichen Prüfung: 7. April 2003

Zusammenfassung

Obwohl Markov-Spiele seit fast 50 Jahren ausgiebig untersucht wurden, gibt es noch immer viele Fragen, auf die noch keine befriedigende Antwort gefunden werden konnte. Besonders trifft dies auf Spiele mit überabzählbaren Zustands- und Aktionenräumen zu. In der vorliegenden Dissertation werden zwei Klassen solcher Spiele behandelt. Dabei wird das Kriterium des maximalen Durchschnittsgewinns zugrunde gelegt.

Zunächst werden Nullsummen-Spiele unter einer gewissen Ergodizitätsbedingung untersucht. Eine Beschränktheit der Gewinnfunktionen wird nicht vorausgesetzt. Es wird die Existenz von Lösungen der Optimalitätsgleichung, des Wertes des Spieles und ε-optimaler stationärer Strategien gezeigt. Die dabei verwendete Beweisidee ist einfacher als vergleichbare Beweise in der Literatur.

Außerdem werden Nicht-Nullsummen-Spiele mit SER-SIT-Struktur behandelt. Die Aussagen zur Existenz stationärer Nash-Equilibria verallgemeinern entsprechende Ergebnisse für Spiele mit endlichen Zustands- und Aktionenräumen. Es werden hinreichende Bedingungen für die Existenz von stationären Nash-Gleichgewichtspunkten für alle Anfangszustände angegeben.

Weiterhin wird ein Mehrlagermodell als Anwendung der Ergebnisse über Spiele mit SER-SIT-Struktur untersucht, für das sich unter relativ schwachen Bedingungen die Existenz von Gleichgewichtsstrategien für alle Spieler ergibt. Diese Strategien besitzen eine *(S,S)*-Struktur. Durch Anwendung dieser Resultate gelingt es, Ergebnisse aus der Literatur für ein statisches Spiel mit austauschbarem Bedarf auf den dynamischen Fall zu verallgemeinern.

Abstract

Though Markov Games have been extensively investigated for almost 50 years, there are still many questions without satisfying answers. This is in particular true for games with uncountable state and action spaces. In this dissertation two classes of such games are studied. The long-run expected average reward criterion is used.

First, zero-sum games in Borel spaces with possibly unbounded payoff functions are investigated under certain ergodicity assumptions. The existence of solutions of the optimality equation, the existence of the value and ε-optimal stationary strategies are proved. The lines of proof are simpler than in the existing literature.

Furthermore, nonzero-sum games with SER-SIT structure are treated. The statements about the existence of stationary Nash-Equilibria generalize results for games with finite state and action spaces. In addition, sufficient conditions for the existence of Nash-Equilibria for all initial states are given.

An application of games with SER-SIT structure is a multi-inventory model. The existence of Nash-Equilibrium strategies for each player within such a model is shown under relatively weak conditions. These strategies have an *(S,S)*-structure. By use of these results it is possible to extend a static game with substitutable demands to the dynamic case.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Auch wenn die mathematische Behandlung von N-Personen-Markov-Spielen, beginnend mit der bahnbrechenden Arbeit von Lloyd S. Shapley aus dem Jahr 1953, inzwischen auf eine Geschichte von fast 50 Jahren zurückblicken kann, gibt es auch in lange bekannten Modellen viele Fragen, die noch keine befriedigende Antwort gefunden haben.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit zwei Klassen von Spielen, bei denen die Zustands- und Aktionenräume Borelräume sind. Borelräume sind zu einer Borelschen Teilmenge eines vollständigen separablen metrischen Raumes homöomorphe topologische Räume. Wir gehen davon aus, dass die Spieler ihre Auszahlungen nach dem Kriterium des erwarteten Durchschnittsgewinnes bewerten.

Die erste behandelte Klasse sind die Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen, mit denen wir uns in Kapitel 2 beschäftigen. Die Untersuchung von Spielen dieser Art beschränkt sich bisher auf einige wenige Arbeiten. Unter verschiedenartigen Voraussetzungen werden folgende Eigenschaften dieser Spiele gezeigt:
1. Es gibt eine Lösung (u^*, φ^*) der Optimalitätsgleichung

$$u + \varphi = \sup_{f \in \mathbf{F^1}} \inf_{g \in \mathbf{F^2}} \{r_{fg} + p_{fg} u\}.$$

2. Der Wert des Spieles erfüllt die Gleichung $v(x) = \varphi^*$ für alle $x \in X$.
3. Es gibt (ε-)optimale stationäre Strategien für beide Spieler.
Um diese Aussagen beweisen zu können, müssen an das Modell starke Bedingungen gestellt werden, die die Ergodizität des Prozesses $\{X_n\}$ der Zustände sichern.
In der Literatur werden verschiedene Beweisideen verwendet. Eine häufig verwendete Möglichkeit ist es zu zeigen, dass

$$LTu = \sup_{f \in \mathbf{F^1}} \inf_{g \in \mathbf{F^2}} \{r_{fg} + p_{fg} u\}$$

ein kontraktiver Operator bezüglich einer gewissen Norm im zugrundeliegenden Funktionenraum ist (z.B. in [22], [44], [45], [63] und [75]). Eine zweite Variante ist es, von Ergebnissen für diskontierte Spiele durch einen Grenzübergang im Diskontfaktor die entsprechenden Aussagen für Spiele mit dem Durchschnittsgewinn-Kriterium zu erhalten ([64], [37]). In [30] wird ein dritter Weg beschritten, den die Autoren selbst als grob verwandt mit Howards Entscheidungsiteration für Markovsche Entscheidungsmodelle bezeichnen.
Die angesprochenen Arbeiten unterscheiden sich darin, dass einige von einer beschränkten Gewinnfunktion ausgehen, während andere auch unbeschränkte Ein-Stufen-Gewinne zulassen.
In der vorliegenden Arbeit lassen wir ebenfalls unbeschränkte Gewinnfunktionen zu. Dieser Fall ist deshalb von besonderer Bedeutung, weil unbeschränkte Gewinnfunktionen in einer Reihe von Anwendungen stochastischer Spiele wichtig sind, siehe [64].

Im Gegensatz zu den oben beschriebenen Beweismethoden benutzen wir einen anderen Ansatz. Unter unseren Voraussetzungen besitzt die Familie von Funktionalgleichungen

$$u = \sup_{f \in \mathbf{F^1}} \inf_{g \in \mathbf{F^2}} \{r_{fg} - (1 - \zeta_{fg})\eta + p_{fg} u - \gamma \zeta_{fg}\}$$

für jedes η eine Lösung (u^*, γ^*). Weitere Betrachtungen ergeben, dass ein η existiert, für das $\gamma^* = \eta$ ist. Daraus folgt sofort die Lösbarkeit der Optimalitätsgleichung. Diese Grundidee wird erstmals in [43] angewandt.
Die von uns verwendeten stochastischen Stabilitätsbedingungen sind zunächst so allgemein gefasst,

dass sie die Annahmen in [30], [37], [43] und [64] als Spezialfälle umfassen. Diese Bedingungen basieren auf relativ neuen Ergebnissen aus der Theorie der Markovketten (siehe [55]). In [30], [37] und [64] werden die entsprechenden Sätze direkt zu Ergodizitätsaussagen über den Prozeß $\{X_n\}$ der Zustände genutzt. Dies führt dazu, dass eine Abschwächung der Voraussetzungen sicherlich eine Änderung des Beweisganges erfordern würde.
Wir verwenden diese Ergodizitätssätze für Markovketten hier nicht. Vielmehr zeigen wir unsere Resultate auf direktem Wege unter Ausnutzung von Kontraktionseigenschaften bestimmter Operatoren. Insbesondere zeigt sich dabei, dass es möglich ist, die obigen Eigenschaften 1.-3. unter schwächeren Voraussetzungen als in [30], [37] und [64] zu beweisen. Diese Aussagen finden sich in den Theoremen 2.1 und 2.2 in Kapitel 2. Theorem 2.3 nutzt Lemma 2.2 zu einer Verallgemeinerung der Aussagen aus [43].
Die genannten Theoreme, die die Hauptaussagen des Abschnittes über Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen darstellen, beziehen sich auf Spezialfälle unserer Annahme **A1**. Im Rahmen dieser Arbeit gelingt es nicht, die Eigenschaften 1.-3. allgemein unter **A1** zu beweisen. Der von uns beschrittene Beweisweg lässt nach Meinung des Autors jedoch weitere Möglichkeiten der Verallgemeinerung offen und sollte deshalb für sich betrachtet von Interesse für fortführende Forschung auf diesem Gebiet sein.
Ich möchte es an dieser Stelle nicht versäumen, den großen Anteil meines akademischen Betreuers, Herrn Prof. Dr. Küenle, an der Entwicklung der erläuterten Ergebnisse hervorzuheben. Ohne seine vielen Anregungen und Ideen wäre es mir sicher nicht möglich gewesen, zu so weitgehenden Resultaten zu kommen. Ein Teil der Aussagen und Beweise des Kapitels 2 wird in Kürze in einem gemeinsamen Artikel des Autors mit Prof. Küenle [46] erscheinen.

Den zweiten großen Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Behandlung von N-Personen-Spielen mit SER-SIT-Struktur in Kapitel 3. Da sich allgemeine Existenz- und Strukturaussagen für Nash-Equilibria in Nicht-Nullsummen-Spielen mit beliebigen Zustands- und Aktionenräumen nach bisherigem Kenntnisstand noch nicht treffen lassen, werden in vielen Arbeiten Spiele mit besonders günstigen Eigenschaften untersucht, die die Analyse erleichtern.
Dazu zählen die sogenannten SER-SIT-Spiele. Das sind Spiele, bei denen sich die Gewinnfunktionen der Spieler durch

$$r^i(x,a) = k^i(a) + l^i(x)$$

als Summe eines vom Zustand und eines von den Aktionen der Spieler abhängigen Termes darstellen lässt. Außerdem ist das Bewegungsgesetz nicht vom Zustand abhängig, in dem sich das Spiel befindet, es gilt also eine Beziehung der Form

$$p(.|x,a) = \tilde{p}(.|a).$$

Trotz ihrer einfachen Struktur finden solche Modelle in vielen ökonomischen Fragestellungen eine Anwendung. Beispiele dafür sind Oligopol-Modelle, Werbungsmodelle (siehe z.B. [20]) oder Modelle aus der Lagerhaltung, die als Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel 3 in Kapitel 4 behandelt werden.
Mit Modellen mit der beschriebenen Struktur beschäftigen sich z.B. Sobel in [84] sowie Parthasarathy, Tijs und Vrieze in [69]. Eine Gemeinsamkeit dieser Arbeiten ist es, dass Zustands- und Aktionenräume als endliche Mengen vorausgesetzt werden.
Wir untersuchen hier SER-SIT-Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen. Nach Wissen des Autors gibt es zu solchen Spielen noch keine veröffentlichten Ergebnisse. Es zeigt sich, dass sich wesentliche Eigenschaften aus dem endlichen Fall übertragen lassen.
Während in [69] zusätzlich vorausgesetzt wird, dass die Menge der zulässigen Aktionen unabhängig vom Zustand ist, ist das hier behandelte Modell allgemeiner und kann als direkte Erweiterung des Modelles aus [84] verstanden werden.
Die Hauptaussagen über SER-SIT-Spiele sind in den Theoremen 3.1 und 3.2 enthalten. Theorem 3.1 sagt aus, dass es für gewisse Anfangszustände stationäre Nash-Equilibria gibt, die myopischer Natur sind. Das bedeutet, dass sich die zugehörigen Strategien durch die Betrachtung eines statischen Spieles, das sich aus den Daten des ursprünglichen Spieles ergibt, bestimmen lassen. Damit können wir das Problem der Charakterisierung eines solchen Equilibriums also auf ein einfacheres Problem zurückführen.
Wenden wir Theorem 3.1 auf endliche Spiele an, so erkennen wir an einem einfachen Beispiel, dass sich in die Resultate in [84] ein Fehler eingeschlichen hat, den wir hier korrigieren können.
Theorem 3.2 erweitert die Existenzaussage für Nash-Equilibria auf alle Anfangszustände. Im Gegensatz

zu Theorem 3.1 ist dafür erwartungsgemäß eine stärkere Voraussetzung nötig. Diese Voraussetzung garantiert uns, dass jeweils $N-1$ Spieler die Möglichkeit haben, den Eintritt des Zustandes des Spieles in eine gewisse Menge in endlicher Zeit zu erzwingen. Ist das Spiel in dieser Menge angelangt, so spielen diese $N-1$ Spieler die myopische Strategie aus Theorem 3.1. Wir zeigen, dass dann eine Abweichung des N-ten Spielers von dieser Spielweise keinen Gewinn für diesen Spieler bringt, und damit die Existenz eines Nash-Equilibriums.

Der abschließende Teil beschäftigt sich mit der Anwendung der Resultate für SER-SIT-Spiele auf Mehrlagermodelle.
In unserem Grundmodell verwalten mehrere Entscheider jeweils ein Lager. Die Spieler beschließen zu Beginn jeder Periode unabhängig voneinander, auf welchen Bestand sie ihr Lager durch Produktion aufstocken wollen. Dann wird ein vektorwertiger zufälliger Bedarf befriedigt. Die Lagerbestände der Spieler zu Beginn der nächsten Periode und die je Stufe zu erzielenden Gewinne hängen sowohl von den eigenen Aktionen als auch von den Entscheidungen anderer Spieler ab. Dabei können Aktionen eines Spielers zu einer höheren Auszahlung an diesen selbst, jedoch zu einer verminderten an andere Spieler führen. Es entsteht die klassische Konfliktsituation eines Spieles. Erfüllen nun die Daten des Spieles Bedingungen, die eine Umformung auf ein SER-SIT-Spiel ermöglichen, so lassen sich die für solche Spiele allgemein hergeleiteten Aussagen auf das Mehrlagermodell übertragen. Eine der erforderlichen Voraussetzungen ist eine lineare Struktur der Produktionskosten, außerdem darf die Bilanzgleichung nur von den Lagerbeständen nach der Produktion abhängen. Weitere Bedingungen werden so gestellt, dass die Annahmen, die in den Theoremen 3.1 und 3.2 getroffen werden, erfüllt sind. Als Korollare folgen dann die entsprechenden Existenzaussagen für Nash-Equilibria im Mehrlagermodell.
Ein ausführlich behandeltes Beispiel erweitert die Ergebnisse einer Arbeit von Parlar [68], der die entsprechende Spielsituation im statischen Fall untersucht hat, auf den Fall eines stochastischen Spieles.

In Kapitel 1 werden die notwendigen grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von N-Personen-Markov-Spielen angegeben. Insbesondere gehen wir auf den Unterschied zwischen dem Nullsummen- und dem Nicht-Nullsummen-Fall ein und skizzieren die dazugehörigen wesentlichen bekannten Resultate. Kapitel 2 enthält die Untersuchung der Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen, Kapitel 3 die Erläuterung der SER-SIT-Spiele als spezielle Nicht-Nullsummen-Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen. Schließlich werden in Kapitel 4 die Mehrlager-Modelle als Beispiele für solche SER-SIT-Spiele behandelt.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei einigen Personen bedanken, deren Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit äußerst hilfreich war. Herausragend zu nennen ist hierbei nochmals mein Betreuer, Herr Prof. Dr. Küenle, durch den mein Interesse an den Problemen der Markovschen Entscheidungsmodelle, Markov-Spiele und auch der Lagerhaltung geweckt worden ist. Eine große Hilfe bei der Einarbeitung in die Thematik war dabei das Buch von Girlich, Köchel und Küenle [26].
Neben den vielfältigen fachlichen Anregungen und Hinweisen verdanke ich Prof. Küenle auch einige Ratschläge zur Aufbereitung und Präsentation der Resultate. Diesbezüglich sehr nützlich, insbesondere in Hinsicht auf Kapitel 4, war auch eine Korrespondenz mit Herrn Prof. Dr. Girlich über mein Preprint [78].
Weiterhin danke ich Frau Dipl.-Math. Jaśkiewicz für die Beantwortung meiner Fragen zu ihrer Arbeit und allen weiteren Autoren, die mich durch die Übersendung ihrer Arbeiten unterstützt haben.

Kapitel 1

Markov-Spiele

Eigenschaften von *Markov-Spielen* oder *stochastischen Spielen* werden seit der grundlegenden Arbeit von Shapley [81] aus dem Jahr 1953 in vielfältigen Variationen untersucht.
Besonders weit erforscht ist der Spezialfall der Markovschen Entscheidungsmodelle, die als Spiele mit nur einem Spieler aufgefasst werden können. Die Begriffsbildung (engl. *Markov decision process*) geht auf Bellman [9] zurück.
Da bei nur einem Spieler keine gegensätzlichen Interessen zu bedenken sind, sind Markovsche Entscheidungsmodelle grundsätzlich einfacher zu behandeln als Markov-Spiele. Es lassen sich jedoch viele Ergebnisse auf den allgemeineren Fall der Markov-Spiele übertragen.
Einführungen in Begiffe und Ergebnisse zu Markovschen Entscheidungsmodellen findet der Leser z.B. in [32] oder in [71]. Mit weitergehenden Fragen, vor allem maßtheoretischer Art, die in Modellen mit überabzählbaren Zustands- und Aktionenräumen auftreten, beschäftigt sich [11]. [28] enthält eine geordnete Übersicht über weitere interessante Literatur.
Wichtige zu untersuchende Fragen in stochastischen Spielen und Entscheidungsmodellen sind z.B. im Nullsummen-Fall die Existenz und Bestimmung des Wertes, die Existenz optimaler Strategien oder ε-optimaler Strategien, die Berechnung solcher Strategien oder die Gültigkeit der Optimalitätsgleichung, deren Lösung der Wert des Spieles ist. Im Nicht-Nullsummen-Fall wird z.B. die Existenz und Bestimmung von Nash-Equilibria untersucht.
Klassifiziert werden diese Probleme durch die Unterscheidung von Modellen mit diskreten oder kontinuierlichen Entscheidungszeitpunkten, mit endlichem oder unendlichem Planungshorizont oder durch die Untersuchung verschiedener Gewinnkriterien wie z.B. diskontierte oder Durchschnittsgewinn-Modelle. Es gibt noch viele weitere mögliche Klassifikationsmerkmale, wie z.B. vollständige/unvollständige Information.
Wir wollen uns hier auf folgendes Grundmodell konzentrieren: Die Entscheidungen der Spieler werden gleichzeitig und unabhängig voneinander zu diskreten Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, ...$ getroffen. Wir untersuchen Spiele mit unendlichem Planungshorizont und konzentrieren uns dabei auf das Durchschnittsgewinn-Kriterium.
In Abschnitt 1.1 wird dieses Grundmodell mathematisch präzisiert, und es werden wichtige Begriffe definiert und erläutert. In den beiden folgenden Abschnitten 1.2 und 1.3 gehen wir auf Nullsummen-Spiele und Nicht-Nullsummen-Spiele ein. Dabei verdeutlichen wir den grundlegenden Unterschied dieser Kategorien und geben einen Überblick über auftretende Probleme und Resultate zu deren Lösung.

1.1 Definitionen

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir N-Personen-Markov-Spiele (stochastische Spiele) mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen für eine endliche Anzahl $N \geq 1$ von Spielern. Ein solches Spiel ist ein Tupel

$$\mathcal{M}_N = ((X, \mathcal{B}(X)), (A^1, \mathcal{B}(A^1)), ..., (A^N, \mathcal{B}(A^N)), K^1, ..., K^N, p, r^1, ..., r^N) \tag{1.1}$$

von Objekten mit folgender Bedeutung:

1. $(X, \mathcal{B}(X))$ sei ein Borel-Raum, der *Zustandsraum* des Spieles. $\mathcal{B}(X)$ sei die σ-Algebra aller Borelschen Teilmengen von X.

2. $(A^i, \mathcal{B}(A^i)), i = 1, ..., N$, seien Borel-Räume, die *Aktionenräume* für die Spieler. Die $\mathcal{B}(A^i)$ seien die σ-Algebren aller Borelschen Teilmengen von A^i.

3. $K^i, i = 1, ..., N$, sind Borelsche Teilmengen von $X \times A^i$. Die Mengen

$$A^i(x) := \{a \in A^i | (x, a) \in K^i\} \in \mathcal{B}(A^i)$$

stellen die *Mengen der zulässigen Aktionen* für Spieler i im Zustand $x \in X$ dar, die hier als nichtleer vorausgesetzt werden. Die Menge

$$K := \{(x, a^1, ..., a^N) | x \in X, a^i \in A^i(x), i = 1, ..., N\}$$

liegt dann in $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(A^1) \otimes .... \otimes \mathcal{B}(A^N)$.

4. p ist ein stochastischer Kern von K nach X, das *Bewegungsgesetz* des Spieles.

5. $r^i : K \to \mathbb{R}$ ist eine Borel-meßbare Funktion, die *Gewinnfunktion* für Spieler i $(i = 1, ..., N)$. Wir bemerken, dass viele Arbeiten anstelle des Gewinns von Kosten ausgehen, die zu minimieren sind. Diese Fälle können jedoch durch Vorzeichenwechsel ineinander überführt werden.

Wenn wir im folgenden von Meßbarkeit sprechen, so ist damit immer Borel-Meßbarkeit gemeint.
Das Markov-Spiel läuft folgendermaßen ab:
Zu diskreten Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, ...$ beobachten die Spieler einen aktuellen Zustand $x \in X$ des Systems. Sie wählen Aktionen $a^i \in A^i(x)$. Daraufhin erhält Spieler i eine Gewinnauszahlung von $r^i(x, a^1, ..., a^N)$. Das System geht mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(.|x, a^1, ..., a^N)$ in einen neuen Zustand $x' \in X$ über. Alle Spieler haben das Ziel, ihren Gewinn zu maximieren.
Sei $H_n = K^n \times X$ für $n = 0, 1, 2, ...$ Ein Element $h_n \in H_n$ heißt *Vorgeschichte* des Spieles bis zur Zeit n.
Eine Folge $\pi^i = (\pi^i_0, \pi^i_1, ...)$ ist eine *Strategie* für Spieler i, wenn jedes π^i_n ein stochastischer Kern von H_n nach A^i ist, und $\pi^i_n(A^i(x_n)|h_n) = 1$ gilt für alle n und $h_n = (x_0, a^1_0, ..., a^N_0, ..., x_n) \in H_n$. Wir verwenden alternativ die Schreibweise $\pi^i_n(h_n)(D) = \pi^i_n(D|h_n)$ für $D \in \mathcal{B}(A^i), h_n \in H_n$. Damit ist $\pi^i_n(h_n)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf A^i.
Die Klasse aller Strategien für Spieler i bezeichnen wir mit $\mathbf{\Pi}^i$.
Die Menge aller stochastischen Kerne f^i von X nach A^i mit $f^i(A^i(x)|x) = 1$ für alle $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathbf{F}^i$. Auch hier schreiben wir $f^i(x)(.) := f^i(.|x)$.
Sei $f^i_0, f^i_1, ...$ eine Folge in $\mathbf{F}^i$. Eine Strategie $\pi^i = (\pi^i_0, \pi^i_1, ...)$ des i-ten Spielers mit der Eigenschaft $\pi^i_n(.|x_0, a^1_0, ..., a^N_0, ..., x_n) = f^i_n(.|x_n)$ für alle n heißt *Markov-Strategie* für Spieler i. Gilt zusätzlich $f^i_n = f^i$ für ein $f^i \in \mathbf{F}^i$ und für alle n, so ist $\pi^i = (f^i, f^i, ...)$ eine *stationäre* Strategie für Spieler i.
Offensichtlich können wir die Menge aller stationären Strategien des i-ten Spielers mit $\mathbf{F}^i$ identifizieren.
Den Raum $\mathbf{\Pi}^1 \times ... \times \mathbf{\Pi}^N$ bezeichnen wir mit $\mathbf{\Pi}$, ebenso ist $\mathbf{F} := \mathbf{F}^1 \times ... \times \mathbf{F}^N$.
Wir betrachten nun den Raum $\Omega := (X \times A^1 \times ... \times A^N)^\infty$, versehen mit der zugehörigen Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F}$. Sei $\pi = (\pi^1, ..., \pi^N) \in \mathbf{\Pi}$ ein beliebiges Strategientupel und $x = x_0 \in X$ ein Anfangszustand des Spieles. Dann können wir unter Ausnutzung des Theorems von Ionescu-Tulcea (siehe z.B. [11], Proposition 7.28) in kanonischer Weise ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß P^π_x und einen stochastischen Prozeß $\{X_n, A^1_n, ..., A^N_n\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definieren . Dabei stellen $X_n, A^1_n, ..., A^N_n$ den Zustand des Spieles und die Aktionen der Spieler zum Zeitpunkt n dar. Mit E^π_x bezeichnen wir den Erwartungswert bezüglich P^π_x.
Für ein Tupel $\pi = (\pi^1, ..., \pi^N) \in \mathbf{\Pi}$ von Strategien und einen Anfangszustand $x \in X$ definieren wir den *erwarteten Gesamtgewinn nach n Stufen* für Spieler i, $(i = 1, ..., N)$, durch

$$J^i_n(x, \pi) = J^i_n(x, \pi^1, ..., \pi^N) := E^\pi_x[\sum_{m=0}^{n-1} r^i(X_m, A^1_m, ..., A^N_m)], \tag{1.2}$$

falls der Erwartungswert existiert. Der *erwartete Durchschnittsgewinn* für Spieler i ist der Grenzwert

$$J^i(x, \pi) = J^i(x, \pi^1, ..., \pi^N) := \liminf_{n \to \infty} J^i_n(x, \pi)/n. \tag{1.3}$$

Das Kriterium des erwarteten Durchschnittsgewinns (oder kurz Durchschnittsgewinns, engl. *average reward, average payoff*) ist in vielen Anwendungen zu bevorzugen, insbesondere wenn nicht von der Möglichkeit einer Diskontierung ausgegangen werden kann. Es hat jedoch auch Nachteile, insbesondere die Unterselektivität. So kann es Strategien π und π' geben, für die für alle $i = 1, ...N$

$$J^i_n(x, \pi) > J^i_n(x, \pi') \tag{1.4}$$

für jedes $x \in X$ und $n = 0, 1, 2, ...$ gilt, jedoch der Durchschnittsgewinn für beide Strategien gleich ist. Vergleichen wir also die Durchschnittsgewinne für verschiedene Strategien, so sind in endlicher Zeit erzielte Gewinne unerheblich, solange das Grenzverhalten von J_n^i gleich bleibt.
Die am tiefsten untersuchte Alternative zum Durchschnittsgewinn ist die Betrachtung von diskontierten Gewinnen. Es zeigt sich, dass dieser Fall i.a. leichter zu behandeln ist als der Durchschnittsgewinn-Fall. Häufig ist es jedoch möglich, aus den Ergebnissen im diskontierten Fall durch Grenzübergang zu Resultaten für Modelle mit dem Durchschnittsgewinn-Kriterium zu kommen (*vanishing discount approach*). In der vorliegenden Arbeit werden wir aber einen anderen Weg beschreiten.
Möglichkeiten, die oben angesprochene Unterselektivität zu vermeiden, sind z.B. die Untersuchung von *overtaking optimality* oder *opportunity reward*, siehe [28] oder [71] im Fall $N = 1$. Bei der Verwendung solcher Kriterien zeigt sich aber schon im Fall Markovscher Entscheidungsmodelle, dass optimale Strategien selbst in elementaren Beispielen nicht existieren müssen.

1.2 Nullsummen-Spiele

Wir sprechen von einem *Nullsummen-Spiel*, wenn

$$\sum_{i=1}^{N} r^i(x, a^1, ..., a^N) = 0 \tag{1.5}$$

für alle $(x, a^1, ..., a^N) \in K$ gilt.
Von besonderem Interesse sind dabei Zwei-Personen-Spiele, also der Fall $N = 2$, von dem wir nun ausgehen wollen.
Ein Gewinn von einer Einheit für Spieler 1 entspricht dann Kosten von einer Einheit für Spieler 2. Während Spieler 1 versucht, seinen Gewinn zu maximieren, strebt der Spieler 2 nach Minimierung seiner Kosten.
Zur Verkürzung der Notation werden wir die Bezeichnungen $J_n := J_n^1 = -J_n^2$ für den erwarteten Gesamtgewinn des 1. Spielers nach n Stufen sowie $J := J^1 = -J^2$ für den erwarteten Durchschnittsgewinn des 1. Spielers verwenden. Weiterhin sei $r := r^1 = -r^2$ die Gewinnfunktion des Spielers 1.
Durch

$$v_l(.) := \sup_{\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1} \inf_{\pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2} J(., \pi^1, \pi^2) \text{ und } v_u(.) := \inf_{\pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2} \sup_{\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1} J(., \pi^1, \pi^2) \tag{1.6}$$

definieren wir die *untere Wertfunktion* und die *obere Wertfunktion* des Spieles $\mathcal{M}_2$. Offensichtlich gilt immer $v_l(x) \leq v_u(x)$ für alle $x \in X$. Wenn sogar die Gleichheit gilt, so nennen wir $v := v_l = v_u$ die *Wertfunktion* des Spieles, und wir sprechen davon, dass der Wert des Spieles $\mathcal{M}_2$ existiert.
Sei $\varepsilon \geq 0$. Wir nehmen an, dass der Wert des Spieles existiert. Eine Strategie $\pi^{1*} \in \mathbf{\Pi}^1$ des 1. Spielers heißt *ε-optimal*, falls

$$\inf_{\pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2} J(x, \pi^{1*}, \pi^2) \geq v(x) - \varepsilon \tag{1.7}$$

für alle $x \in X$ gilt. Entsprechend ist $\pi^{2*} \in \mathbf{\Pi}^2$ *ε-optimal* für Spieler 2, wenn

$$\sup_{\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1} J(x, \pi^1, \pi^{2*}) \leq v(x) + \varepsilon \tag{1.8}$$

für alle $x \in X$ gültig ist.
Wie üblich werden 0-optimale Strategien kurz *optimal* genannt.

Die Grundlagen in der Theorie stochastischer Nullsummen-Spiele wurden in der Arbeit von Shapley [81] gelegt. Zustands- und Aktionenmengen werden von Shapley als endlich vorausgesetzt, und als Kriterium wird der erwartete Gesamtgewinn verwendet. Das Spiel stoppt zu jedem Zeitpunkt mit einer positiven Wahrscheinlichkeit. Diese Eigenschaft sichert die Existenz des Wertes des Spieles, und beide Spieler besitzen optimale stationäre Strategien.
Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse auf überabzählbare Zustandsräume finden sich z.B. in [50] und [61].
Im Fall des Durchschnittsgewinnes zeigen schon einfache Spiele mit endlichen Zustands- und Aktionenräumen, dass keine optimalen stationären Strategien existieren müssen. Bekanntestes dieser

Beispiele ist das *Big Match* (siehe [23] and [15]). 1981 gelang Mertens und Neyman [52] ein allgemeiner Beweis für die Existenz des Wertes in endlichen Spielen, in dem sie durch einen asymptotischen Zugang die Resultate für diskontierte Spiele nutzen. Maitra und Sudderth [51] entwickelten eine allgemeine Theorie zu Nullsummen-Spielen mit limsup-Auszahlungen.
Da es im Durchschnittsgewinn-Fall i.a. keine optimalen stationären Strategien geben muss, ist die Frage nach Bedingungen für deren Existenz von Interesse. Ebenfalls interessant ist die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Optimalitätsgleichung eine Lösung besitzt, da diese zur Bestimmung des Wertes und optimaler stationärer Strategien genutzt werden kann. Während im diskontierten Fall Fixpunktargumente genutzt werden können, ist die Optimalitätsgleichung im Durchschnittsgewinn-Fall schwieriger zu behandeln. In [18] wird durch ein Beispiel gezeigt, dass die Existenz optimaler stationärer Strategien nicht hinreichend für die Existenz einer Lösung der Optimalitätsgleichung ist. Die Optimalitätsgleichung und die Existenz stationärer optimaler Strategien in Spielen mit endlichen oder abzählbaren Zustandsräumen wird beispielsweise in [1], [16], [20] und [80] untersucht.
Mit dem Fall Borelscher Zustandsräume haben sich bisher nur relativ wenige Autoren beschäftigt. In den Arbeiten von Küenle [45], Nowak [63], Ghosh und Bagchi [22] und Rieder [75] wird von beschränkten Gewinnfunktionen ausgegangen.
In der vorliegenden Arbeit werden in Kapitel 2 Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen und unbeschränkten Gewinnfunktionen untersucht. Ein Teil der dort vorgestellten Ergebnisse ist in Zusammenarbeit mit Prof. Küenle entstanden und wird demnächst in [46] veröffentlicht. Weitere Arbeiten, die sich mit Nullsummen-Spielen mit unbeschränkten Gewinnfunktionen beschäftigen und einen engen Bezug zu den hier untersuchten Problemen haben, stammen von Nowak [64], Hernández-Lerma und Lasserre [30], Küenle [43] und Jaśkiewicz und Nowak [37].

1.3 Nicht-Nullsummen-Spiele

Bei Nicht-Nullsummen-Spielen wird die Eigenschaft (1.5) für die Gewinnfunktionen nicht vorausgesetzt.
Im allgemeinen ist es nicht möglich, vom Wert des Spieles im Sinne von (1.6) zu sprechen. Ein häufig benutzter Optimalitätsbegriff für Nicht-Nullsummen-Spiele ist der des ε-Nash-Equilibriums. Um die Schreibweise zu vereinfachen, verwenden wir folgende Bezeichnung: Ist $\pi = (\pi^1, ..., \pi^N) \in \mathbf{\Pi}$ und wählen wir einen Spieler i aus ($i = 1, ..., N$), so sei $\pi^{-i} := (\pi^1, ..., \pi^{i-1}, \pi^{i+1}, ..., \pi^N)$ das $(N-1)$-Tupel der Strategien aller anderen Spieler. Für $\rho \in \mathbf{\Pi}^i$ schreiben wir (ρ, π^{-i}) für das Strategientupel $(\pi^1, ..., \pi^{i-1}, \rho, \pi^{i+1}, ..., \pi^N)$.
Sei $\varepsilon \geq 0$ und $Y \subset X$. Ein Strategientupel $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ heißt *ε-Nash-Equilibrium bezüglich* Y, falls für jedes $i = 1, ..., N$ die Ungleichung

$$J^i(x, \pi^*) \geq J^i(x, (\pi^i, \pi^{-i*})) - \varepsilon \tag{1.9}$$

für alle Strategien $\pi^i \in \mathbf{\Pi}^i$ und für alle $x \in Y$ gilt. Ist $Y = X$, so sprechen wir kurz von einem *ε-Nash-Equilibrium* oder auch nur *ε-Equilibrium*.
Ein 0-Equilibrium wird auch als *Nash-Equilibrium* bezeichnet.
Das Tupel π^* ist also ein ε-Equilibrium, falls eine einseitige Abweichung eines der Spieler dem betreffenden Spieler nur einen maximalen Gewinn von ε bringt. Spielen die Spieler π^*, so befindet sich das Spiel in einem gewissen Gleichgewicht.
Eine Diskussion des Konzeptes der Nash-Equilibria (für den Fall statischer Spiele) findet der Leser in [72]. Grundsätzlich ist zu sagen, dass das Spielen eines Nash-Equilibriums zu einem stabilen Verhalten des Spieles führt. Sind keine für alle Spieler bindenden Absprachemöglichkeiten der Spieler vorgesehen, so werden die Spieler häufig ein Interesse an einer solchen Stabilität haben. Außerdem bildet die Eigenschaft, dass kein einzelner Spieler ein Interesse an einer Abweichung vom Equilibrium hat, in gewisser Weise eine natürliche Erweiterung des Optimalitätskonzeptes im Nullsummen-Fall.
Anhand von illustrierenden Beispielen werden in [72] jedoch einige Einwände gegen die Verwendung dieses Lösungsbegriffes erhoben. Der wesentliche Nachteil besteht darin, dass es mehrere verschiedene Nash-Equilibria geben kann, die sich in den Auszahlungen an die Spieler unterscheiden. Selbst wenn gewisse Absprachen der Spieler untereinander erlaubt sind, so wird es i.a. nicht möglich sein, immer ein für alle Spieler günstiges Nash-Equilibrium zu finden. Spielen die einzelnen Spieler aber Strategien, die zu verschiedenen Nash-Equilibria gehören, so ist das entstehende Strategientupel i.a. kein Nash-Equilibrium mehr.
Einen umfangreichen Überblick über die Möglichkeiten der Verfeinerung des Nash-Equilibrium-Konzeptes enthält [85].

Der Kenntnisstand über die Eigenschaften von Nash-Equilibria in Nicht-Nullsummen-Spielen enthält noch heute viele Lücken.
So wurde die Existenz eines Nash-Equilibriums in stationären Strategien für diskontierte Spiele mit endlichen Zustands- und Aktionenräumen bereits 1964 von Fink [21] bewiesen. Über die Struktur der Menge solcher Equilibria selbst ist allerdings wenig bekannt.
Wichtige Ergebnisse für diskontierte Spiele mit überabzählbarem Zustandsraum sind die Existenz von Nash-Equilibria in nichtstationären Strategien (Mertens und Parthasarathy [53]), die Existenz von stationären korrelierten Equilibria (Nowak und Raghavan [66]) und die Existenz stationärer ε-Nash-Equilibria (Rieder [74], Whitt [90], Nowak [59]). Die Existenz stationärer Nash-Equilibria für diskontierte Spiele mit überabzählbarem Zustandsraum ist noch offen.
Im Fall des Durchschnittsgewinnes wurde die lange offene Frage der Existenz eines Nash-Equilibriums für Spiele mit endlichem Zustands- und Aktionenraum erst vor wenigen Jahren durch Vieille [89] positiv beantwortet.
Für Spiele mit abzählbarem Zustandsraum werden in [1], [16] und [79] spezielle Bedingungen angegeben, unter denen Nash-Equilibria existieren.
Schließlich untersuchen die Arbeiten von Nowak [62], Küenle [44] und Nowak und Altman [65] Nicht-Nullsummen-Spiele mit allgemeinen Zustands- und Aktionenräumen. In [62] wird die Existenz von stationären korrelierten Equilibria unter bestimmten Bedingungen bewiesen, in [44] und [65] unter verschiedenen Annahmen die Existenz stationärer ε-Nash-Equilibria.
Im Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit untersuchen wir Nicht-Nullsummen-Spiele mit einer speziellen Struktur, sogenannte SER-SIT-Spiele, für den Fall Borelscher Zustands- und Aktionenräume. Wir beweisen die Existenz stationärer Nash-Equilibria bezüglich gewisser Anfangszustände für diese Spiele unter relativ allgemeinen Voraussetzungen. Außerdem zeigen wir, dass sich diese Gleichgewichte durch die Betrachtung von Nash-Equilibria in gewissen statischen Spielen bestimmen lassen. Dabei ergeben sich diese statischen Spiele aus den Daten des untersuchten dynamischen Ausgangsspieles.

Kapitel 2

Eine spezielle Klasse von Zwei-Personen-Nullsummen-Spielen mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen

In diesem Kapitel untersuchen wir Nullsummen-Spiele mit $N = 2$ Spielern, die speziellen Bedingungen genügen.
Inbesondere lassen wir zu, dass die Gewinnfunktion möglicherweise unbeschränkt sein kann.
Unsere grundlegende Annahme **A1** wird in verwandter Form in anderen Arbeiten zu Markovschen Entscheidungsmodellen und Markov-Spielen verwendet, so z.B. in [1] oder [29].
Mit sehr ähnlichen Problemen beschäftigen sich Arbeiten von Nowak [64], Küenle [43], Hernández-Lerma und Lasserre [30] und Jaśkiewicz und Nowak [37].
In allen Arbeiten werden im wesentlichen drei Dinge untersucht:
(a) die Existenz von Lösungen der Optimalitätsgleichung,
(b) die Existenz des Wertes des Spieles und
(c) die Existenz (ε-)optimaler stationärer Strategien.
In [30], [37] und [64] wird dabei ausgenutzt, dass aus Spezialfällen von Annahme **A1** und einigen Regularitätsbedingungen an die Parameter des Spieles die W-geometrische Ergodizität der Folge der Zustände folgt.
Die vorliegende Arbeit beschreitet einen anderen Weg, der sich in ähnlicher Form in [43] findet. Wir beweisen, dass eine Familie von Funktionalgleichungen

$$u = \sup_{f \in \mathbf{F^1}} \inf_{g \in \mathbf{F^2}} \{r_{fg} - (1 - \zeta_{fg})\eta + p_{fg}u - \gamma\zeta_{fg}\}$$

für jedes η eine Lösung (u^*, γ^*) besitzt. Anschließend zeigen wir, dass ein η existiert, für das $\gamma^* = \eta$ ist. Damit hat die Optimalitätsgleichung eine Lösung. (b) und (c) folgen mit Standardargumenten aus der dynamischen Optimierung.
Nachdem in 2.1 die Modellannahmen und erste Folgerungen dargestellt werden, widmet sich Abschnitt 2.2 den Voraussetzungen, die von Nowak in [64] verwendet werden. Zunächst zeigen wir, dass sich ein Modell mit einer beliebigen Funktion $\zeta(x)$ in **A3** auf ein Modell zurückführen lässt, bei dem ζ Indikatorfunktion einer Menge C ist. In [64] wird diese Gestalt von ζ vorausgesetzt. Dann beweisen wir (a), ohne wie in [64] die Beschränktheit der Gewichtsfunktion W auf C vorauszusetzen.
In Abschnitt 2.3 zeigen wir, dass unter den Annahmen aus [30] ebenfalls (a) und damit auch (b) und (c) folgen. Im Gegensatz zu [30] benötigen wir dafür jedoch nicht die Existenz einer Dichtefunktion für das Bewegungsgesetz.
Obwohl die Beweislinie der Aussagen in 2.2 und 2.3 in Grundzügen gleich verläuft, sind die Details sehr verschieden.
Abschnitt 2.4 verallgemeinert die Aussagen aus [43] leicht.
In allen angesprochenen Fällen wird die Sattelpunktbedingung **A2** vorausgesetzt. In 2.5 geben wir für diese Annahme hinreichende Bedingungen an. Die dort getroffenen Aussagen gelten für jedes der in 2.2-2.4 untersuchten Modelle. So erhalten wir eine weitere Verallgemeinerung der Aussagen in den

angesprochenen Arbeiten.
Schließlich befaßt sich Abschnitt 2.6 mit der oben erwähnten W-geometrischen Ergodizität der Folge der Zustände. Es werden einige der in [30], [37] und [64] verwendeten Eigenschaften bewiesen. Wir konkretisieren eine Eindeutigkeitsaussage, die in [37] zwar nicht formuliert, jedoch bewiesen wird.
Ein Teil der Resultate dieses Kapitels wird demnächst in [46] veröffentlicht.

2.1 Grundlegende Annahmen

Zuerst wollen wir einige nützliche Schreibweisen definieren.
Für eine gegebene Menge Y sei $P(Y)$ die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf Y. Ist Y ein Borelraum, so ist auch $P(Y)$, versehen mit der schwachen Topologie, ein Borelraum ([11], Korollar 7.25.1).
Seien $x \in X, \nu_1 \in P(A^1(x))$ und $\nu_2 \in P(A^2(x))$ gegeben. Ist ω eine meßbare Abbildung von K in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\omega(x, \nu_1, \nu_2) := \int\limits_{A^1(x)} \int\limits_{A^2(x)} \omega(x, a^1, a^2) \nu_2(db) \nu_1(da). \tag{2.1}$$

Ist $f \in \mathbf{F}^1$, so ist f eine Übergangswahrscheinlichkeit von X nach A^1 mit $f(A^1(x)|x) = 1$ für alle $x \in X$. Mit $f(x)(.) := f(.|x)$ für $x \in X$ ist $f(x) \in P(A^1(x))$. Ebenso definiert $g(x)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $P(A^2(x))$ für ein $g \in \mathbf{F}^2$. Mit (2.1) können wir demnach $\omega_{fg}(x) := \omega(x, f(x), g(x))$ schreiben. Wir bemerken, dass ω_{fg} eine meßbare Abbildung ist (siehe z.B. [11]). Insbesondere definieren wir $r_{fg}(x)$ und $p_{fg}(.|x)$ auf die oben beschriebene Art und Weise.
Nehmen wir an, die Spieler spielen stationäre Strategien $(f, g) \in \mathbf{F}$. Wir können p_{fg} als einen stochastischen Kern von X in sich selbst ansehen. Legen wir einen Anfangszustand $X_0 = x \in X$ fest, so ist der stochastische Prozess $\{X_n\}$ der Zustände des Spiels zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, ...$ eine Markov-Kette mit p_{fg} als Übergangskern.
Wie üblich definieren wir den *n-Schritt-Übergangskern* als

$$p^n_{fg}(.|x) := \int\limits_X p^{n-1}_{fg}(.|y) p_{fg}(dy|x) \tag{2.2}$$

für $n \geq 1$ und $p^0_{fg}(.|x) := \delta_x(.)$ (Dirac-Maß).
Sei $q = (q(n))_{n=0,1,2,...}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den nichtnegativen ganzen Zahlen 0,1,2,... Dann definiert

$$K^q_{fg}(.|x) := \sum_{n=0}^{\infty} q(n) p^n_{fg}(.|x) \tag{2.3}$$

einen stochastischen Kern von X in sich selbst. Ist $q = \delta_1$, so ist $K^q_{fg} = p_{fg}$. Ist q die geometrische Verteilung mit einem Parameter $\vartheta \in (0, 1)$, d.h. ist $q(n) = (1-\vartheta)\vartheta^n$, so nennen wir K^q_{fg} die *Resolvente* der Markov-Kette $\{X_n\}$.

Folgende Annahme sollen in diesem Kapitel gelten:

Annahme A1:
Es existieren meßbare Funktionen $W : X \to [1, \infty)$ und $\zeta : K \to [0, 1]$ sowie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung q, so dass folgende Aussagen gelten

a Es gibt eine reelle Konstante r_1 mit

$$\sup_{x \in X, a^1 \in A^1(x), a^2 \in A^2(x)} |r(x, a^1, a^2)| \leq r_1 W(x) \tag{2.4}$$

b Es gibt reelle Konstanten $\alpha \in (0, 1)$ und $\beta > 0$ mit

$$\int\limits_X W(t) p(dt|x, a^1, a^2) \leq \alpha W(x) + \beta \zeta(x, a^1, a^2) \tag{2.5}$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$.

c Für jedes Strategienpaar $(f,g) \in \mathbf{F}$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{fg} auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$K^q_{fg}(.|x) \geq \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}(.) \tag{2.6}$$

für alle $x \in X$.

d Es existieren Strategien $(f,g) \in \mathbf{F}$, für die $\zeta_{fg}(x) > 0$ für mindestens ein $x \in X$ gilt.

Die Funktion $\zeta_{fg} : X \to \mathbb{R}$ ist analog zu r_{fg} definiert, s. oben.
Die Annahmen **A1.b** und **A1.c** haben ihren Ursprung in Bedingungen aus der Theorie der Markovschen Ketten (siehe z.B. [55]), sind jedoch etwas allgemeiner als die dort verwendeten Annahmen formuliert. Nähere Erläuterungen dazu folgen in Kapitel 2.6.
Die Aufnahme von **A1.d** hat beweistechnische Gründe. Gilt diese Annahme nicht, so wäre jedoch auch **A1.c** trivialerweise erfüllt.
Wir bemerken, dass mit **A1.a** und **A1.b** die Wohldefiniertheit von (1.2) folgt.
In den folgenden Kapiteln werden wir einige Spezialfälle von **A1** behandeln.

Zuvor wollen wir jedoch noch einige weitere Bezeichnungen einführen.
Es sei V die meßbare Funktion von X nach $\mathbb{R}$ mit $V(x) := W(x) + \beta$ für alle $x \in X$.

Definition 2.1. *Für eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ sei*

$$||u||_V := \sup_{x \in X} \frac{|u(x)|}{V(x)}. \tag{2.7}$$

Weiterhin sei $\mathcal{V}$ die Menge aller meßbaren Funktionen u mit $||u||_V < \infty$.

V kann hier also als *Gewichtsfunktion* angesehen werden. Es ist klar, dass $\mathcal{V}$ ein Banachraum ist, der die beschränkten meßbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ als Untermenge enthält. Insbesondere liegt r_{fg} als meßbare Funktion wegen **A1.a** in $\mathcal{V}$.
Für ein Paar von Strategien $(f,g) \in \mathbf{F}$ seien folgende Operatoren definiert:

- $p_{fg} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $p_{fg}u(x) := \int_X u(t) p_{fg}(dt|x)$
- $\mu_{fg} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ mit $\mu_{fg}u := \int_X u(t)\mu_{fg}(dt)$
- $P_{fg} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $P_{fg}u(x) := p_{fg}u(x) - \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}u$
- $T_{fg} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ with $T_{fg}u(x) := r_{fg}(x) + p_{fg}u(x)$
- $T^\eta_{fg} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ with $T^\eta_{fg}u(x) := r_{fg}(x) - (1 - \zeta_{fg}(x))\eta + p_{fg}u(x)$

für $\eta \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{V}, x \in X$.
Aus Annahme **A1.b** folgt

$$p_{fg}W(x) = \int_X W(t) p_{fg}(dt|x) \leq \alpha W(x) + \beta\zeta_{fg}(x) \tag{2.8}$$

für alle $(f,g) \in \mathbf{F}$.
Um einzusehen, dass für jedes $u \in \mathcal{V}$ auch $P_{fg}u$, $T_{fg}u$ und $T^\eta_{fg}u$ wieder in $\mathcal{V}$ liegen, genügt es zu zeigen, dass $p_{fg}u$ in $\mathcal{V}$ liegt. $p_{fg}u$ ist meßbar (siehe z.B. [11], Proposition 7.29). Außerdem folgern wir aus (2.8), dass für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
|p_{fg}u(x)| &= |\int_X u(t)p_{fg}(dt|x)| \\
&\leq ||u||_V \int_X V(t)p_{fg}(dt|x) \\
&\leq ||u||_V\{\alpha V(x) + (1 - \alpha + \zeta_{fg}(x))\beta\} \\
&\leq ||u||_V(\alpha + 2\beta - \alpha\beta)V(x)
\end{aligned}$$

Abschließend definieren wir für $x \in X$

$$LT^\eta u(x) := \sup_{f\in\mathbf{F}^1} \inf_{g\in\mathbf{F}^2} T^\eta_{fg} u(x)$$

und

$$LTu(x) := \sup_{f\in\mathbf{F}^1} \inf_{g\in\mathbf{F}^2} T_{fg} u(x).$$

Nun können wir eine weitere wesentliche Annahme dieses Kapitels formulieren:

Annahme A2:
Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $u \in \mathcal{V}$ gibt es stationäre Strategien $f_\varepsilon \in \mathbf{F}^1, g_\varepsilon \in \mathbf{F}^2$ mit

$$T_{fg_\varepsilon} u - \varepsilon \leq T_{f_\varepsilon g_\varepsilon} u \leq T_{f_\varepsilon g} u + \varepsilon \tag{2.9}$$

für alle $(f, g) \in \mathbf{F}$.

Annahme **A2** fordert die Existenz eines ε-Sattelpunktes. In Abschnitt 2.5 werden wir hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von **A2** angeben.
Sei $u \in \mathcal{V}$ fest gewählt. Mit (2.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\inf_{g\in\mathbf{F}^2} \sup_{f\in\mathbf{F}^1} T_{fg} u - \varepsilon &\leq \sup_{f\in\mathbf{F}^1} T_{fg_\varepsilon} u - \varepsilon \\
&\leq T_{f_\varepsilon g_\varepsilon} u \\
&\leq \inf_{g\in\mathbf{F}^2} T_{f_\varepsilon g} u + \varepsilon \\
&\leq \sup_{f\in\mathbf{F}^1} \inf_{g\in\mathbf{F}^2} T_{fg} u + \varepsilon \\
&\leq \inf_{g\in\mathbf{F}^2} \sup_{f\in\mathbf{F}^1} T_{fg} u + \varepsilon
\end{aligned}$$

Lassen wir nun ε gegen 0 streben, so folgt

$$LTu = \sup_{f\in\mathbf{F}^1} \inf_{g\in\mathbf{F}^2} T_{fg} u = \inf_{g\in\mathbf{F}^2} \sup_{f\in\mathbf{F}^1} T_{fg} u \tag{2.10}$$

und

$$T_{fg_\varepsilon} u - 2\varepsilon \leq LTu \leq T_{f_\varepsilon g} u + 2\varepsilon \tag{2.11}$$

für alle $(f, g) \in \mathbf{F}$.
Insbesondere gilt

$$T_{f_\varepsilon g_\varepsilon} u - 2\varepsilon \leq LTu \leq T_{f_\varepsilon g_\varepsilon} u + 2\varepsilon.$$

Setzen wir nun $\varepsilon = n^{-1}$ für $n = 1, 2, ...$ und definieren durch $h_n := T_{f_\varepsilon g_\varepsilon} u$ eine zugehörige Folge meßbarer Funktionen in $\mathcal{V}$, so gilt

$$|LTu(x) - h_n(x)| \leq 2n^{-1}$$

für alle $x \in X$. Es gilt also $LTu(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ für alle $x \in X$. Damit ist LTu meßbar und liegt in $\mathcal{V}$ (siehe z.B. [8]).

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir eine Kontraktionseigenschaft des Operators P_{fg} zeigen, die in weiteren Beweisen eine zentrale Rolle spielen wird. Wir setzen dabei voraus, dass $K^q_{fg} = p_{fg}$ gilt, dass also in (2.3) $q = \delta_1$ gesetzt wird.

Lemma 2.1. *Angenommen, es gelten* **A1.b** *und* **A1.c** *mit* $q = \delta_1$. *Dann gilt:*

(a) Es existiert eine Konstante $\lambda \in (0, 1)$ *mit*

$$P_{fg} V < \lambda V \tag{2.12}$$

für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$.

(b) P_{fg} *ist eine isotone lineare Abbildung.*

(c) Für beliebige $u_1, u_2 \in \mathcal{V}$ *gilt*

$$|P_{fg}u_1(x) - P_{fg}u_2(x)| \leq ||u_1 - u_2||_V P_{fg}V(x) \tag{2.13}$$

für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$.

Beweis. (a) Sei $(f, g) \in \mathbf{F}$ ein fixiertes Strategienpaar. Mit $\lambda := \frac{\alpha+\beta}{1+\beta}$ gilt $\alpha < \lambda < 1$ und $\beta = \lambda - \alpha + \lambda\beta \leq (\lambda - \alpha)W(x) + \lambda\beta$ für alle $x \in X$. μ_{fg} aus **A1.c** ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und somit ist $\mu_{fg}V > \mu_{fg}\beta = \beta$. Unter Anwendung von (2.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{fg}V(x) &= p_{fg}W(x) + \beta \\ &\leq \alpha W(x) + \beta\zeta_{fg}(x) + \beta \\ &< \alpha W(x) + \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}V + \beta \\ &\leq \alpha W(x) + \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}V + (\lambda - \alpha)W(x) + \lambda\beta \\ &= \lambda(W(x) + \beta) + \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}V \\ &= \lambda V(x) + \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}V \end{aligned}$$

für alle $x \in X$.

(b) Nach Voraussetzung gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{fg} auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$p_{fg}(.|x) \geq \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}(.)$$

für alle $x \in X$.
Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{V}, u_2 \geq u_1$. Es ist $u_2 - u_1 \geq 0$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} p_{fg}u_2(x) - p_{fg}u_1(x) &= \int_X (u_2(t) - u_1(t))p_{fg}(dt|x) \\ &\geq \zeta_{fg}(x) \int_X (u_2(t) - u_1(t))\mu_{fg}(dt) \\ &= \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}u_2 - \zeta_{fg}(x)\mu_{fg}u_1 \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Demnach ist

$$P_{fg}u_2 = p_{fg}u_2 - \zeta_{fg}\mu_{fg}u_2 \geq p_{fg}u_1 - \zeta_{fg}\mu_{fg}u_1 = P_{fg}u_1.$$

Die Linearität von P_{fg} folgt direkt aus der Definition.

(c) Aus (2.7) bekommen wir $|u_1(x) - u_2(x)| \leq ||u_1 - u_2||_V V(x)$ für alle $x \in X$. Das ist äquivalent zu

$$-||u_1 - u_2||_V V(x) \leq u_1(x) - u_2(x) \leq ||u_1 - u_2||_V V(x).$$

Wenden wir Teil (b) an, so gilt

$$-||u_1 - u_2||_V P_{fg}V(x) \leq P_{fg}(u_1 - u_2)(x) \leq ||u_1 - u_2||_V P_{fg}V(x),$$

oder $|P_{fg}(u_1 - u_2)(x)| \leq ||u_1 - u_2||_V P_{fg}V(x)$. □

2.2 Der Fall $\zeta_{fg} = \zeta$ und $q = \delta_1$

In diesem Abschnitt wollen wir Annahme **A1** in folgender Weise spezialisieren:
Die Funktion ζ_{fg} aus **A1.b-d** soll nicht von der Wahl der Strategien f und g abhängen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung q aus **A1** sei das Dirac-Maß δ_1. Wir ersetzen also Annahme A1 durch

Annahme A3:
Es existieren meßbare Funktionen $W : X \to [1, \infty)$ und $\zeta : X \to [0, 1]$, so dass folgende Aussagen gelten

a Es gibt eine reelle Konstante r_1 mit

$$\sup_{x \in X, a \in A^1(x), b \in A^2(x)} |r(x, a^1, a^2)| \leq r_1 W(x) \tag{2.14}$$

b Es gibt reelle Konstanten $\alpha \in (0, 1)$ und $\beta > 0$ mit

$$\int_X W(t) p(dt|x, a^1, a^2) \leq \alpha W(x) + \beta \zeta(x) \tag{2.15}$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$.

c Für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{fg} auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$p_{fg}(.|x) \geq \zeta(x) \mu_{fg}(.) \tag{2.16}$$

für alle $x \in X$.

d Es gilt $\zeta(x) > 0$ für mindestens ein $x \in X$.

Die zentrale Aussage dieses Abschnittes ist das

Theorem 2.1. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A3***.*

(a) Es gibt eine Lösung $(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ der Gleichung

$$u + \varphi = LTu. \tag{2.17}$$

(b) Ist $(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ Lösung von (2.17), so gilt $v(x) = \varphi^*$ für alle $x \in X$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren ε-optimale stationäre Strategien für beide Spieler.

Gleichung (2.17) wird *Optimalitätsgleichung* des Spieles genannt.

Für den Beweis von Theorem 2.1 wird eine Reihe von Lemmata benötigt.
Zunächst zeigen wir, dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass $\zeta = \delta \mathbf{I}_C$ für eine gewisse Konstante $\delta \in (0, 1)$ und eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ ist. Wie üblich bezeichnet dabei $\mathbf{I}_C$ die Indikatorfunktion der Menge C.
Anschließend werden wir Theorem 2.1 für diese spezielle Gestalt von ζ beweisen.

Lemma 2.2. *Es gelte* **A3.b-d***.*
Dann existiert eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$, so dass folgende Aussagen gelten

(a) Es gibt reelle Konstanten $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$ und $\tilde{\beta} > 0$ mit

$$\int_X W(t) p(dt|x, a^1, a^2) \leq \tilde{\alpha} W(x) + \tilde{\beta} \mathbf{I}_C(x) \tag{2.18}$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$.

(b) Es gibt eine Konstante $\delta \in (0, 1)$, so dass für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{fg} auf $\mathcal{B}(X)$ existiert mit

$$p_{fg}(.|x) \geq \delta \mathbf{I}_C(x) \mu_{fg}(.) \tag{2.19}$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Nach **A3.d** gibt es ein $x_0 \in X$ mit $\zeta(x_0) > 0$. Wir setzen

$$\delta := \min\{\frac{1-\alpha}{2\beta}, \frac{\zeta(x_0)}{2}\}. \tag{2.20}$$

Offensichtlich ist $\delta \in (0,1)$. Nun definieren wir eine Menge C durch

$$C := \{x \in X | \zeta(x) \geq \delta\}.$$

Da nach (2.20) $\zeta(x_0) > \delta$ ist, ist $x_0 \in C$, also ist C nichtleer. Wegen der Meßbarkeit von ζ ist außerdem $C \in \mathcal{B}(X)$. Das Komplement von C bezeichnen wir mit C^c. Aus **A3.b** erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_X W(t)p(dt|x, a^1, a^2) &\leq \alpha W(x) + \beta\zeta(x) \\ &= \alpha W(x) + \beta\zeta(x)\mathbf{I}_{C^c}(x) + \beta\zeta(x)\mathbf{I}_C(x) \\ &\leq \alpha W(x) + \beta\delta + \beta\mathbf{I}_C(x) \\ &\leq (\alpha + \beta\delta)W(x) + \beta\mathbf{I}_C(x)\end{aligned}$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$. Wegen (2.20) ist $\beta\delta < 1 - \alpha$. Setzen wir $\tilde{\alpha} := \alpha + \beta\delta \in (\alpha, 1)$ und $\tilde{\beta} := \beta$, so gilt (2.18).
Andererseits existiert nach **A3.c** für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{fg} auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$p_{fg}(.|x) \geq \zeta(x)\mu_{fg}(.) \geq \zeta(x)\mathbf{I}_C(x)\mu_{fg}(.) \geq \delta\mathbf{I}_C(x)\mu_{fg}(.)$$

für alle $x \in X$, also auch (2.19). □

Im Rest dieses Kapitels werden wir die in Lemma 2.2 definierten Größen δ und C als gegeben annehmen. Wir ersetzen die Ungleichungen (2.15) und (2.16) durch (2.18) und (2.19), wobei wir die Bezeichnungnen α und β für $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ verwenden werden. Insbesondere ergeben sich die in Abschnitt 2.1 definierten Operatoren P_{fg} und T^{η}_{fg} nun durch $P_{fg}u = p_{fg}u - \delta\mathbf{I}_C\mu_{fg}u$ und $T^{\eta}_{fg}u := r_{fg} - (1-\delta\mathbf{I}_C)\eta + p_{fg}u$. Die folgenden Lemmata 2.3-2.5 werden benötigt, um Lemma 2.6 zu beweisen.

Lemma 2.3. *Es gelte* **A3.b-d**. *Dann gibt es eine Konstante M, so dass für alle Strategienpaare $(f, g) \in \mathbf{F}$ gilt:*

$$\mu_{fg}V \leq M \tag{2.21}$$

Beweis. Aus (2.18) und (2.19) folgt für $(f, g) \in \mathbf{F}$, dass

$$\begin{aligned}\mu_{fg}V = \int_X V(t)\mu_{fg}(dt) &\leq \frac{1}{\delta}\int_X V(t)p_{fg}(dt|x) \\ &= \frac{1}{\delta}\int_X W(t)p_{fg}(dt|x) + \frac{\beta}{\delta} \\ &\leq \frac{\alpha}{\delta}W(x) + \frac{\beta}{\delta}\mathbf{I}_C(x) + \frac{\beta}{\delta}\end{aligned}$$

für jedes $x \in C$. C ist nichtleer, das heißt

$$\mu_{fg}V \leq \frac{\alpha}{\delta}\inf_{x \in C} W(x) + 2\frac{\beta}{\delta} =: M\ .$$ □

Lemma 2.4. *Für jede beliebige nichtleere Menge $D \subset X$ und jedes $u \in \mathcal{V}$ gibt es eine Konstante $d_0 \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sup_{\xi \in D}\frac{u(\xi) - d_0}{V(\xi)} = -\inf_{\xi \in D}\frac{u(\xi) - d_0}{V(\xi)}. \tag{2.22}$$

Beweis. Es seien $h_1(d) := \sup\limits_{\xi \in D} \frac{u(\xi)-d}{V(\xi)}$ und $h_2(d) := \sup\limits_{\xi \in D} \frac{d-u(\xi)}{V(\xi)} = -\inf\limits_{\xi \in D} \frac{u(\xi)-d}{V(\xi)}$ für $d \in \mathbb{R}$.
Wir wählen $x_0 \in D$ beliebig. Für $U := |u(x_0)| + V(x_0)||u||_V + 1 > 0$ erhalten wir

$$\frac{u(\xi) - U}{V(\xi)} = \frac{u(\xi)}{V(\xi)} - \frac{U}{V(\xi)} \leq \frac{u(\xi)}{V(\xi)} \leq \frac{|u(\xi)|}{V(\xi)} \leq ||u||_V \text{ für alle } \xi \in D.$$

Das bedeutet $h_1(U) \leq ||u||_V$. Andererseits ist $U > |u(x_0)| + V(x_0)||u||_V \geq u(x_0) + V(x_0)||u||_V$, demnach $\frac{U-u(x_0)}{V(x_0)} > ||u||_V$, also $h_2(U) > ||u||_V$.
Weiterhin gilt $U > |u(x_0)| + V(x_0)||u||_V \geq -u(x_0) + V(x_0)||u||_V$. Daraus folgt $\frac{u(x_0)+U}{V(x_0)} > ||u||_V$, und somit $h_1(-U) > ||u||_V$. Für h_2 ergibt sich

$$\frac{-U - u(\xi)}{V(\xi)} = -\frac{U}{V(\xi)} - \frac{u(\xi)}{V(\xi)} \leq -\frac{u(\xi)}{V(\xi)} \leq \frac{|u(\xi)|}{V(\xi)} \leq ||u||_V \text{ für alle } \xi \in D.$$

Also ist $h_2(-U) \leq ||u||_V$.
Zusammenfassend gilt $h_1(-U) > ||u||_V \geq h_2(-U)$ und $h_1(U) \leq ||u||_V < h_2(U)$. h_1 und h_2 sind stetig, folglich gibt es ein d_0 mit $h_1(d_0) = h_2(d_0)$. □

Lemma 2.5. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A3**.
Für alle $u_1, u_2 \in \mathcal{V}$ und jedes $\eta \in \mathbb{R}$ gibt es eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ mit

$$||LT^\eta u_1 - LT^\eta u_2 - d\mathbf{I}_C||_V \leq \lambda ||u_1 - u_2||_V. \tag{2.23}$$

Beweis. Wir definieren $w(x) := LT^\eta u_1(x) - LT^\eta u_2(x) = LTu_1(x) - LTu_2(x) \in \mathcal{V}$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben.
Unter Anwendung von Lemma 2.4 können wir ein $d \in \mathbb{R}$ wählen, für das $\sup\limits_{\xi \in C} \frac{w(\xi)-d}{V(\xi)} = -\inf\limits_{\xi \in C} \frac{w(\xi)-d}{V(\xi)}$ gilt.
Es gibt $x_1, x_2 \in C$ mit

$$\sup_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)} \leq \frac{w(x_1) - d}{V(x_1)} + \varepsilon$$

und

$$\inf_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)} \geq \frac{w(x_2) - d}{V(x_2)} - \varepsilon.$$

Falls C mehr als ein Element enthält, ist es o.B.d.A. möglich, x_1, x_2 mit $x_1 \neq x_2$ zu wählen. Auf den Fall eines einelementigen C kommen wir später zurück.
Wegen (2.11) existieren stationäre Strategien $f_i \in \mathbf{F}^1, g_i \in \mathbf{F}^2 \quad (i = 1, 2)$ mit

$$T_{fg_i} u_i - \varepsilon V \leq T_{fg_i} u_i - \varepsilon \leq LTu_i$$

für jedes $f \in \mathbf{F}^1$ und

$$T_{f_i g} u_i + \varepsilon V \geq T_{f_i g} u_i + \varepsilon \geq LTu_i$$

für jedes $g \in \mathbf{F}^2$ $(i = 1, 2)$. Daraus folgt, dass

$$w = LTu_1 - LTu_2 \leq T_{f_1 g_2} u_1 - T_{f_1 g_2} u_2 + 2\varepsilon V = p_{f_1 g_2} u_1 - p_{f_1 g_2} u_2 + 2\varepsilon V$$

und

$$-w = LTu_2 - LTu_1 \leq T_{f_2 g_1} u_2 - T_{f_2 g_1} u_1 + 2\varepsilon V = p_{f_2 g_1} u_2 - p_{f_2 g_1} u_1 + 2\varepsilon V.$$

Da wir $x_1 \neq x_2$ gewählt haben, existieren stationäre Strategien $(f^*, g^*) \in \mathbf{F}$ mit

$$f^*(.|x_1) = f_1(.|x_1), f^*(.|x_2) = f_2(.|x_2), g^*(.|x_1) = g_2(.|x_1), g^*(.|x_2) = g_1(.|x_2).$$

Sei zuerst $x \in C$. Wir stellen fest, dass

$$\inf_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)} \leq \frac{w(x) - d}{V(x)} \leq \sup_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)} = -\inf_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)}$$

gilt, und demnach

$$\inf_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)} \leq -\frac{w(x) - d}{V(x)} \leq -\inf_{\xi \in C} \frac{w(\xi) - d}{V(\xi)}.$$

Mit
$$|\frac{w(x)-d}{V(x)}| \leq -\inf_{\xi\in C}\frac{w(\xi)-d}{V(\xi)} = \sup_{\xi\in C}\frac{w(\xi)-d}{V(\xi)}$$
erhalten wir
$$\begin{aligned}
&|\frac{w(x)-d}{V(x)}(V(x_1)+V(x_2))\\
&\leq (\sup_{\xi\in C}\frac{w(\xi)-d}{V(\xi)})\, V(x_1) - (\inf_{\xi\in C}\frac{w(\xi)-d}{V(\xi)})\, V(x_2)\\
&\leq \frac{w(x_1)-d}{V(x_1)}V(x_1) + \varepsilon V(x_1) - \frac{w(x_2)-d}{V(x_2)}V(x_2) + \varepsilon V(x_2)\\
&= w(x_1) - w(x_2) + \varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&\leq p_{f_1 g_2}u_1(x_1) - p_{f_1 g_2}u_2(x_1) + 2\varepsilon V(x_1)\\
&\qquad + p_{f_2 g_1}u_2(x_2) - p_{f_2 g_1}u_1(x_2) + 2\varepsilon V(x_2)\\
&\qquad\qquad + \varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&= p_{f_1 g_2}(u_1-u_2)(x_1) - p_{f_2 g_1}(u_1-u_2)(x_2) + 3\varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&= p_{f^*g^*}(u_1-u_2)(x_1) - p_{f^*g^*}(u_1-u_2)(x_2) + 3\varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&= p_{f^*g^*}(u_1-u_2)(x_1) - \delta\mathbf{I}_C(x_1)\mu_{f^*g^*}(u_1-u_2)\\
&\qquad - p_{f^*g^*}(u_1-u_2)(x_2) + \delta\mathbf{I}_C(x_2)\mu_{f^*g^*}(u_1-u_2)\\
&\qquad\qquad + 3\varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&= P_{f^*g^*}(u_1-u_2)(x_1) - P_{f^*g^*}(u_1-u_2)(x_2) + 3\varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&\leq P_{f^*g^*}V(x_1)||u_1-u_2||_V + P_{f^*g^*}V(x_2)||u_1-u_2||_V + 3\varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&\leq \lambda V(x_1)||u_1-u_2||_V + \lambda V(x_2)||u_1-u_2||_V + 3\varepsilon(V(x_1)+V(x_2))\\
&= (\lambda||u_1-u_2||_V + 3\varepsilon)(V(x_1)+V(x_2)).
\end{aligned}$$
Die letzten beiden Ungleichungen folgen aus (2.13) und (2.12). Zusammenfassend gilt
$$|\frac{w(x)-d}{V(x)}| \leq \lambda||u_1-u_2||_V + 3\varepsilon.$$
Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $\frac{|w(x)-d|}{V(x)} \leq \lambda||u_1-u_2||_V$ für alle $x \in C$.
Ist andererseits $x \notin C$, so ergibt sich wieder
$$\begin{aligned}
w(x) &\leq p_{f_1 g_2}u_1(x) - p_{f_1 g_2}u_2(x) + 2\varepsilon V(x)\\
&= p_{f_1 g_2}(u_1-u_2)(x) + 2\varepsilon V(x)\\
&= p_{f_1 g_2}(u_1-u_2)(x) - \delta\mathbf{I}_C(x)\mu_{f_1 g_2}(u_1-u_2) + 2\varepsilon V(x)\\
&= P_{f_1 g_2}(u_1-u_2)(x) + 2\varepsilon V(x)\\
&\leq \lambda V(x)||u_1-u_2||_V + 2\varepsilon V(x)
\end{aligned}$$
und auf analoge Weise $-w(x) \leq \lambda V(x)||u_1-u_2||_V + 2\varepsilon V(x)$.
Das bedeutet $\frac{|w(x)|}{V(x)} \leq \lambda||u_1-u_2||_V + 2\varepsilon$ für alle $x \notin C$, und $|\frac{w(x)}{V(x)}| \leq \lambda||u_1-u_2||_V$ für $\varepsilon \to 0$.
Fassen wir beide Fälle zusammen, so haben wir
$$\frac{|w(x)-d\mathbf{I}_C(x)|}{V(x)} = \frac{|LT^\eta u_1(x) - LT^\eta u_2(x) - d\mathbf{I}_C(x)|}{V(x)} \leq \lambda||u_1-u_2||_V$$
für alle $x \in X$. Das beweist (2.23).
Es bleibt der Fall, dass C nur ein Element enthält, sagen wir x_0. Die nach Lemma 2.4 gewählte Konstante d erfüllt die Gleichung
$$\sup_{\xi\in C}\frac{w(\xi)-d}{V(\xi)} = \frac{w(x_0)-d}{V(x_0)} = -\inf_{\xi\in C}\frac{w(\xi)-d}{V(\xi)} = -\frac{w(x_0)-d}{V(x_0)},$$
aus der $d = w(x_0)$ folgt. Es ergibt sich $\frac{|w(x_0)-d|}{V(x_0)} = 0 \leq \lambda||u_1-u_2||_V$ für das einzige Element $x_0 \in C$ und $|\frac{w(x)}{V(x)}| \leq \lambda||u_1-u_2||_V$ für alle $x \notin C$ wie oben. □

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit der Lösbarkeit einer parametrischen Klasse von Funktionalgleichungen.

Lemma 2.6. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A3**.
Für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ hat die Funktionalgleichung

$$u + \delta \mathbf{I}_C \gamma = LT^\eta u \tag{2.24}$$

eine Lösung $(u^*, \gamma^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $u_0 \in \mathcal{V}$ beliebig, $d_0 = 0$. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(u_i), u_i \in \mathcal{V}$ und $(d_i), d_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ...)$ auf folgende Weise:
Für $i = 1, 2, ...$ setzen wir $u_i := LT^\eta u_{i-1} - \delta d_{i-1} \mathbf{I}_C \in \mathcal{V}$.
Nach Lemma 2.5 gibt es ein $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ mit

$$||LT^\eta u_i - LT^\eta u_{i-1} - \tilde{d}\mathbf{I}_C||_V \leq \lambda ||u_i - u_{i-1}||_V.$$

Setzen wir $d_i := d_{i-1} + \frac{1}{\delta}\tilde{d}$, so gilt für die so konstruierten Folgen

$$\begin{aligned}
||u_{i+1} - u_i||_V &= ||LT^\eta u_i - \delta d_i \mathbf{I}_C - LT^\eta u_{i-1} + \delta d_{i-1}\mathbf{I}_C||_V \\
&= ||LT^\eta u_i - LT^\eta u_{i-1} - (\delta d_i - \delta d_{i-1})\mathbf{I}_C||_V \\
&= ||LT^\eta u_i - LT^\eta u_{i-1} - \tilde{d}\mathbf{I}_C||_V \\
&\leq \lambda ||u_i - u_{i-1}||_V.
\end{aligned}$$

Demnach ist (u_i) eine Cauchy-Folge. Der Raum $\mathcal{V}$ ist vollständig, deshalb konvergiert die Folge für $i \to \infty$ gegen ein $u^* \in \mathcal{V}$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest. Es gibt ein n_0, so dass $||u^* - u_i||_V \leq \varepsilon$ für alle $i \geq n_0$, oder $u^* - \varepsilon V \leq u_i \leq u^* + \varepsilon V$.
Nach Definition ist T_{fg} ein isotoner Operator für alle $(f, g) \in \mathbf{F}$. Wenden wir T_{fg} auf die Ungleichung an, so folgt

$$T_{fg}(u^* - \varepsilon V) - u^* - \varepsilon V \leq T_{fg} u_i - u_{i+1} \leq T_{fg}(u^* + \varepsilon V) - u^* + \varepsilon V$$

und

$$T_{fg} u^* - u^* - p_{fg} \varepsilon V - \varepsilon V \leq T_{fg} u_i - u_{i+1} \leq T_{fg} u^* - u^* + p_{fg} \varepsilon V + \varepsilon V.$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
T_{fg} u^* - u^* - \varepsilon(P_{fg} V + \delta \mathbf{I}_C \mu_{fg} V) - \varepsilon V &\leq T_{fg} u_i - u_{i+1} \\
&\leq T_{fg} u^* - u^* + \varepsilon(P_{fg} V + \delta \mathbf{I}_C \mu_{fg} V) + \varepsilon V,
\end{aligned}$$

und wegen (2.12) und Lemma 2.3 folgt

$$T_{fg} u^* - u^* - \varepsilon(\lambda V + \delta M) - \varepsilon V \leq T_{fg} u_i - u_{i+1} \leq T_{fg} u^* - u^* + \varepsilon(\lambda V + \delta M) + \varepsilon V.$$

Die Subtraktion des Terms $(1 - \delta \mathbf{I}_C)\eta$ führt zu

$$T^\eta_{fg} u^* - u^* - \varepsilon(\lambda + \delta M + 1)V \leq T^\eta_{fg} u_i - u_{i+1} \leq T^\eta_{fg} u^* - u^* + \varepsilon(\lambda + \delta M + 1)V.$$

Diese Ungleichungen gelten für alle $(f, g) \in \mathbf{F}$, und sie gelten auch, wenn zuerst das Infimum über alle $g \in \mathbf{F}^2$ und anschließend das Supremum über alle $f \in \mathbf{F}^1$ genommen wird. Es gilt

$$LT^\eta u^* - u^* - \varepsilon(\lambda + \delta M + 1)V \leq LT^\eta u_i - u_{i+1} \leq LT^\eta u^* - u^* + \varepsilon(\lambda + \delta M + 1)V$$

für alle $i \geq n_0$, oder gleichbedeutend

$$LT^\eta u^* - u^* - \varepsilon(\lambda + \delta M + 1)V \leq \delta d_i \mathbf{I}_C \leq LT^\eta u^* - u^* + \varepsilon(\lambda + \delta M + 1)V$$

Wir erhalten $||LT^\eta u^* - u^* - \delta d_i \mathbf{I}_C||_V \to 0$ für $i \to \infty$. Daraus folgt die Existenz eines $\gamma^* \in \mathbb{R}$ mit $d_i \to \gamma^*$ für $i \to \infty$, und $\delta \gamma^* \mathbf{I}_C = LT^\eta u^* - u^*$. □

Die folgenden Lemmata beschäftigen sich mit Eigenschaften der Lösung γ^* von (2.24), insbesondere mit der eindeutigen Abhängigkeit von η, und nachfolgend mit der Stetigkeit und der Monotonie dieser Abhängigkeit. Lemma 2.7 bereitet den Beweis dieser Eigenschaften vor.

Lemma 2.7. *Es gelten* **A3.b** *und* **A3.c**. *Sind* $s \in \mathcal{V}$ *und* $(f,g) \in \mathbf{F}$ *beliebig vorgegeben, so gelten folgende Aussagen:*

(a) Die Funktionalgleichung

$$u = s + P_{fg}u \tag{2.25}$$

hat eine eindeutige Lösung $u^*_{fg} \in \mathcal{V}$.

(b) $(v^*, \tau^*_{fg}) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ *ist eine Lösung der Funktionalgleichung*

$$v + \delta\tau\mathbf{I}_C = s + p_{fg}v \tag{2.26}$$

genau dann, wenn $v^* = u^*_{fg} + const$ *und* $\tau^*_{fg} = \mu_{fg}u^*_{fg}$, *wobei* u^*_{fg} *Lösung von (2.25) ist.*

(c) Ist $s \leq \varepsilon V$ *für ein* $\varepsilon > 0$, *dann ist* $u^*_{fg} \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda}V$.

Beweis. (a) Definieren wir einen Operator $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ durch $\Phi u = s + P_{fg}u$, so erhalten wir für alle $u_1, u_2 \in \mathcal{V}$ mit (2.13) und (2.12)

$$|\Phi u_1(x) - \Phi u_2(x)| = |P_{fg}u_1(x) - P_{fg}u_2(x)| \leq \lambda V(x)||u_1 - u_2||_V$$

für alle $x \in X$. Also ist die Abbildung Φ kontraktiv. Da außerdem $\mathcal{V}$ ein vollständiger metrischer Raum ist, erhalten wir die Behauptung durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.

(b) Ganz offensichtlich sind wegen Teil (a) $\tau^*_{fg} = \mu_{fg}u^*_{fg}$ und $v^* = u^*_{fg} + const$ Lösung von (2.26). Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit (für v bis auf eine Konstante) dieser Lösung. Sei also (v, τ) eine beliebige Lösung von (2.26). Wir definieren eine Konstante $\vartheta := \tau - \mu_{fg}v$. Nun ist auch das Paar $(v + \vartheta, \tau)$ eine Lösung von (2.26). Daraus folgt

$$\begin{aligned}(v + \vartheta) + \delta\tau\mathbf{I}_C &= s + p_{fg}(v + \vartheta)\\ &= s + P_{fg}(v + \vartheta) + \delta\mathbf{I}_C\mu_{fg}(v + \vartheta)\\ &= s + P_{fg}(v + \vartheta) + \delta\mathbf{I}_C\mu_{fg}v + \delta\mathbf{I}_C\vartheta\\ &= s + P_{fg}(v + \vartheta) + \delta\tau\mathbf{I}_C\end{aligned}$$

Es ist also $v + \vartheta = s + P_{fg}(v + \vartheta)$. Aus Teil (a) und der Eindeutigkeit der Lösung von (2.25) erhalten wir $v + \vartheta = u^*_{fg}$ und

$$\tau = \vartheta + \mu_{fg}v = \mu_{fg}\vartheta + \mu_{fg}v = \mu_{fg}(v + \vartheta) = \mu_{fg}u^*_{fg}$$

Das zeigt, dass τ eindeutig ist und dass sich v nur um eine Konstante von u^*_{fg} unterscheidet.

(c) Unter Verwendung des Operators Φ aus dem Beweis von Teil (a) definieren wir eine Folge $(u_n), n = 0, 1, 2, ...$ in $\mathcal{V}$ durch die rekursive Vorschrift

$$u_0 := 0, \qquad u_{n+1} := \Phi u_n = s + P_{fg}u_n.$$

Es gilt $u_0 = 0 < \lambda^0\varepsilon V$, und wenn $u_n < \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \lambda^k V$ für ein beliebiges $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ richtig ist, erhalten wir mit Lemma 2.1(a) und (b)

$$\begin{aligned}u_{n+1} = s + P_{fg}u_n &\leq \varepsilon V + P_{fg}(\varepsilon \sum_{k=0}^{n} \lambda^k V)\\ &= \varepsilon V + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \lambda^k P_{fg}V\\ &< \varepsilon V + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \lambda V = \varepsilon \sum_{k=0}^{n+1} \lambda^k V.\end{aligned}$$

Demnach gilt $u_n < \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \lambda^k V$ für alle n. Aus Banachs Fixpunktsatz folgt, dass die Folge (u_n) gegen die Lösung u^*_{fg} von (2.25) konvergiert. Weiter erhalten wir

$$u^*_{fg} = \lim_{n\to\infty} u_n \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k V = \frac{\varepsilon}{1-\lambda} V. \qquad \square$$

Lemma 2.8. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A3**. *Sei* $\eta \in \mathbb{R}$ *fest gewählt.*
Sind dann (u_1, γ_1) *und* (u_2, γ_2) *zwei Lösungen von (2.24), so gilt* $\gamma_1 = \gamma_2$.

Beweis. Seien (u_1, γ_1) und (u_2, γ_2) zwei Lösungen von (2.24), für die wir o.B.d.A. $\gamma_1 \geq \gamma_2$ voraussetzen können.
Nehmen wir weiter an, es gelte $\gamma_1 > \gamma_2$.
Sei $\varepsilon > 0$. Mit $w := u_1 - u_2$ und $\tau := \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} w + \delta\tau \mathbf{I}_C &= LT^\eta u_1 - LT^\eta u_2 \\ &= LTu_1 - LTu_2 \\ &\leq p_{f_1 g_2} u_1 - p_{f_1 g_2} u_2 + \varepsilon V \\ &= p_{f_1 g_2} w + \varepsilon V \end{aligned}$$

für gewisse $f_1 \in \mathbf{F}^1, g_2 \in \mathbf{F}^2$ (siehe auch Beweis von Lemma 2.5).
Sei $s \in \mathcal{V}$ definiert durch $s := w + \delta\tau\mathbf{I}_C - p_{f_1 g_2} w \leq \varepsilon V$. Nach Lemma 2.7(a) hat die Funktionalgleichung $u = s + P_{f_1 g_2} u$ eine eindeutige Lösung, sagen wir $w' \in \mathcal{V}$.
Da die Gleichung $w + \delta\tau\mathbf{I}_C = s + p_{f_1 g_2} w$ erfüllt ist, folgt wegen Lemma 2.7(b), dass $\tau = \mu_{f_1 g_2} w'$ gelten muss.
Schließlich ist $s \leq \varepsilon V$, so dass nach Lemma 2.7(c) $w' \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} V$ gilt. Unter Verwendung von Lemma 2.3 folgt

$$\tau = \mu_{f_1 g_2} w' \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \mu_{f_1 g_2} V \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} M$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Das zieht jedoch $\tau \leq 0$ nach sich, einen Widerspruch zur Annahme $\gamma_1 > \gamma_2$. $\square$

Lemma 2.9. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A3**. *Ferner sei* (u, γ_η) *eine Lösung von (2.24) für* $\eta \in \mathbb{R}$.
Dann hängt γ_η *nichtwachsend und stetig von* η *ab.*

Beweis. Seien $\eta_1 < \eta_2$ beliebig gewählt. Dann gibt es nach Lemma 2.6 $(u_{\eta_1}, \gamma_{\eta_1})$ und $(u_{\eta_2}, \gamma_{\eta_2})$, die Lösungen von (2.24) für $\eta = \eta_1$ bzw. $\eta = \eta_2$ sind. Wegen Lemma 2.8 sind $\gamma_{\eta_1}, \gamma_{\eta_2}$ durch η_1, η_2 eindeutig bestimmt.
Wir definieren $w := u_{\eta_1} - u_{\eta_2}, \gamma := \gamma_{\eta_1} - \gamma_{\eta_2}, \eta := \eta_2 - \eta_1 > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wie im Beweis von Lemma 2.8 erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{\eta_1} - u_{\eta_2} + \delta(\gamma_{\eta_1} - \gamma_{\eta_2})\mathbf{I}_C &= w + \delta\gamma\mathbf{I}_C \\ &= LT^{\eta_1} u_{\eta_1} - LT^{\eta_2} u_{\eta_2} \\ &= LTu_{\eta_1} - LTu_{\eta_2} + (1 - \delta\mathbf{I}_C)(\eta_2 - \eta_1) \\ &\leq p_{f_1 g_2} u_{\eta_1} - p_{f_1 g_2} u_{\eta_2} + \varepsilon V + \eta \\ &\leq p_{f_1 g_2} w + (\eta + \varepsilon) V \end{aligned}$$

für gewisse $f_1 \in \mathbf{F}^1, g_2 \in \mathbf{F}^2$. Definieren wir $s \in \mathcal{V}$ durch $s := w + \delta\gamma\mathbf{I}_C - p_{f_1 g_2} w \leq (\eta + \varepsilon) V$, so können wir wie im Beweis von Lemma 2.8 folgern, dass

$$\gamma \leq \frac{\eta + \varepsilon}{1-\lambda} \mu_{f_1 g_2} V \leq \frac{\eta + \varepsilon}{1-\lambda} M$$

gilt. Andererseits existieren stationäre Strategien $f_2 \in \mathbf{F}^1, g_1 \in \mathbf{F}^2$ mit

$$\begin{aligned} -w - \delta\gamma\mathbf{I}_C &= LT^{\eta_2} u_{\eta_2} - LT^{\eta_1} u_{\eta_1} \\ &= LTu_{\eta_2} - LTu_{\eta_1} - (1 - \delta\mathbf{I}_C)(\eta_2 - \eta_1) \\ &\leq p_{f_2 g_1} u_{\eta_2} - p_{f_2 g_1} u_{\eta_1} + \varepsilon V \\ &= -p_{f_2 g_1} w + \varepsilon V, \end{aligned}$$

oder gleichbedeutend $w + \delta\gamma \mathbf{I}_C \geq p_{f_2 g_1} w - \varepsilon V$.
Mit $s' := w + \delta\gamma \mathbf{I}_C - p_{f_2 g_1} w \geq -\varepsilon V$ folgern wir mit Lemma 2.7(a), dass die Funktionalgleichung $u = -s' + P_{f_2 g_1} u$ eine eindeutige Lösung besitzt, sagen wir $w' \in \mathcal{V}$.
Es gilt $-w - \delta\gamma \mathbf{I}_C = -s' - p_{f_2 g_1} w$. Dies ist eine Funktionalgleichung vom Typ (2.26), so dass nach Lemma 2.7(b) folgt $-\gamma = \mu_{f_2 g_1} w'$.
Wegen $-r' \leq \varepsilon V$ ist $w' \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} V$ (Lemma 2.7(c)). Wir erhalten

$$-\gamma = \mu_{f_2 g_1} w' \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \mu_{f_2 g_1} V \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} M.$$

Zusammenfassend gilt

$$-\frac{\varepsilon}{1-\lambda} M \leq \gamma \leq \frac{\eta}{1-\lambda} M + \frac{\varepsilon}{1-\lambda} M.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt daraus $0 \leq \gamma \leq \frac{\eta}{1-\lambda} M$, oder $0 \leq \gamma_{\eta_1} - \gamma_{\eta_2} \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{1-\lambda} M$ für $\eta_1 < \eta_2$.
Dies impliziert jedoch die Behauptungen. □

Nun haben wir das Rüstzeug, um Theorem 2.1 beweisen zu können:

Beweis. (Theorem 2.1)

(a) Aus den Lemmata 2.6 und 2.8 folgt, dass die Funktionalgleichung (2.24) für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ eine Lösung (u^*, γ^*) mit eindeutig bestimmtem $\gamma^* = \gamma_\eta$ besitzt. Nach Lemma 2.9 muss es ein η^* mit $\eta^* = \gamma_{\eta^*}$ geben. Zu diesem η^* gibt es ein $u^* \in \mathcal{V}$ mit

$$u^* + \delta \mathbf{I}_C \gamma_{\eta^*} = L T^{\eta^*} u^* = L T u^* - (1 - \delta \mathbf{I}_C) \eta^*.$$

Also ist $u^* + \eta^* = LTu^*$. Mit $\varphi^* := \eta^*$ ist das Paar (u^*, φ^*) eine Lösung von (2.17).

(b) Der Beweis von Teil (b) ist ein Standardbeweis in der dynamischen Optimierung.
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (2.11) und (2.17) existieren stationäre Strategien $(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \in \mathbf{F}$ mit

$$T_{f g_\varepsilon} u^* - \varepsilon \leq u^* + \varphi^* \leq T_{f_\varepsilon g} u^* + \varepsilon$$

für alle $(f, g) \in \mathbf{F}$. Daraus folgt, dass

$$u^*(x) + \varphi^* \geq r(x, \nu_1, g_\varepsilon(x)) + \int_X u^*(y) p(dy|x, \nu_1, g_\varepsilon(x)) - \varepsilon$$

und

$$u^*(x) + \varphi^* \leq r(x, f_\varepsilon(x), \nu_2) + \int_X u^*(y) p(dy|x, f_\varepsilon(x), \nu_2) + \varepsilon$$

für alle $\nu_1 \in P(A^1(x)), \nu_2 \in P(A^2(x))$ und $x \in X$. Durch iterative Anwendung dieser Ungleichungen (siehe z.B. [20] oder [28]) erhalten wir

$$u^*(x) + n\varphi^* \geq J_n(x, \pi^1, g_\varepsilon) + E_x^{(\pi^1, g_\varepsilon)} u^*(X_n) - n\varepsilon$$

und

$$u^*(x) + n\varphi^* \leq J_n(x, f_\varepsilon, \pi^2) + E_x^{(f_\varepsilon, \pi^2)} u^*(X_n) + n\varepsilon$$

für alle $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1, \pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2$. Eine Division durch n und der Übergang zum lim inf für $n \to \infty$ ergibt

$$J(x, \pi^1, g_\varepsilon) - \varepsilon \leq \varphi^* \leq J(x, f_\varepsilon, \pi^2) + \varepsilon \tag{2.27}$$

für alle $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1, \pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2$ und $x \in X$. Dabei benutzen wir die Tatsache, dass aus **A1.b** (hier speziell **A3.b**) für beliebige Startegienpaare $\pi \in \mathbf{\Pi}$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} n^{-1} E_x^\pi u^*(X_n) = 0$ gilt (siehe [31]).
Aus (2.27) leiten wir

$$\sup_{\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1} J(x, \pi^1, g_\varepsilon) - \varepsilon \leq \varphi^* \leq \inf_{\pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2} J(x, f_\varepsilon, \pi^2) + \varepsilon \tag{2.28}$$

ab und somit

$$\begin{aligned} v_u(x) - \varepsilon &= \inf_{\pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2} \sup_{\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1} J(x, \pi^1, \pi^2) - \varepsilon \\ &\leq \varphi^* \leq \sup_{\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1} \inf_{\pi^2 \in \mathbf{\Pi}^2} J(x, \pi^1, \pi^2) + \varepsilon = v_l(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies jedoch für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss $v_u(x) \leq \varphi^* \leq v_l(x) \leq v_u(x)$ für alle $x \in X$ gelten. Demnach haben wir $v(x) = \varphi^*$ für alle $x \in X$. Weiterhin zeigt (2.28) nach Definition, dass f_ε und g_ε ε-optimale Strategien für Spieler 1 bzw. 2 sind. □

Ein bekanntes Beispiel für ein Spiel, bei dem es keine ε-optimalen stationären Strategien gibt, ist das *Big Match* (siehe [23] and [15]). Wir wollen prüfen, welche unserer Annahmen beim *Big Match* verletzt ist.

Beispiel. Wir betrachten das folgende Nullsummen-Spiel:
Seien $X = \{1, 2, 3\}$, $A^1 = A^2 = \{0, 1\}$, $K^1 = K^2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 0)\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten seien gegeben durch

$$\begin{aligned} &p(\{1\}|1, 0, 0) = p(\{1\}|1, 0, 1) = p(\{3\}|1, 1, 0) \\ &\qquad = p(\{2\}|1, 1, 1) = p(\{2\}|2, 0, 0) = p(\{3\}|3, 0, 0) = 1, \end{aligned}$$

alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten seien gleich Null. Startet das Spiel im Zustand 1, und wählt Spieler 1 die Aktion 0, so verbleibt das Spiel im Zustand 1. Wählt Spieler 1 die Aktion 1, so bewegt sich das Spiel in der nächsten Periode nach Zustand 2 oder 3, abhängig von der Aktion des Spielers 2. Befindet sich das Spiel in Zustand 2 oder 3, so verweilt es dort unendlich lange, das bedeutet, die Zustände 2 und 3 sind absorbierend.
Die Einstufen-Gewinne für den 1. Spieler sind

$$r(1, 0, 0) = r(1, 1, 1) = r(2, 0, 0) = 0, \qquad r(1, 0, 1) = r(1, 1, 0) = r(3, 0, 0) = 1.$$

Im Zustand 2 bekommt Spieler 1 nichts, in Zustand 3 erhält er 1, in Zustand 1 ist der Gewinn 1, falls beide Spieler die gleiche Aktion wählen, wählen sie verschiedene Aktionen, so erhält Spieler 1 nichts. Dieses Spiel erfüllt die Bedingung **A3.a**, jedoch nicht **A3.b** und **c** gleichzeitig.
Gelten nämlich **A3.b** und **c**, so ist für $x = 2, 3$

$$\int_X W(t) p(dt|x, 0, 0) = W(x) \leq \alpha W(x) + \beta \zeta(x),$$

damit ist $\zeta(x) > 0$ für $x = 2, 3$.
Ist nun $(f, g) \in \mathbf{F}$ ein beliebiges Strategienpaar, so existiert nach **A3.c** ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$\begin{aligned} &p_{fg}(\{1\}|2) = 0 \geq \zeta(2)\mu(\{1\}), p_{fg}(\{2\}|3) = 0 \geq \zeta(3)\mu(\{2\}), \\ &p_{fg}(\{3\}|2) = 0 \geq \zeta(2)\mu(\{3\}). \end{aligned}$$

Das bedeutet aber $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = 0$. Dies ist ein Widerspruch.
Wir bemerken hier, dass diese Argumentation auch richtig ist, wenn an Stelle von **A3** die allgemeinere Annahme **A1** verwendet wird. Auch hier können **A1.b** und **c** nicht gleichzeitig richtig sein.

2.3 Der Fall $\mu_{fg} = \mu$ und $q = \delta_1$

Wenden wir uns nun einem weiteren Spezialfall von Annahme **A1** zu.
Das in **A1.c** verwendete Wahrscheinlichkeitsmaß μ_{fg} soll unabhängig von der Wahl von f und g gleich einem festen Wahrscheinlichkeitsmaß μ sein.
Wie in Abschnitt 2.2 wird für die Wahrscheinlichkeitsverteilung q aus **A1** das Dirac-Maß δ_1 angenommen. Wir ersetzen also Annahme A1 durch

Annahme A4:
Es existieren meßbare Funktionen $W : X \to [1, \infty)$ und $\zeta : K \to [0, 1]$, so dass folgende Aussagen gelten

a Es gibt eine reelle Konstante r_1 mit

$$\sup_{x \in X, a^1 \in A^1(x), a^2 \in A^2(x)} |r(x, a^1, a^2)| \leq r_1 W(x) \tag{2.29}$$

b Es gibt reelle Konstanten $\alpha \in (0, 1)$ und $\beta > 0$ mit

$$\int_X W(t) p(dt|x, a^1, a^2) \leq \alpha W(x) + \beta \zeta(x, a^1, a^2) \tag{2.30}$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$.

c Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$p_{fg}(.|x) \geq \zeta_{fg}(x) \mu(.) \tag{2.31}$$

für alle $x \in X$ und für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$.

d Es existieren Strategien $(f, g) \in \mathbf{F}$, für die $\zeta_{fg}(x) > 0$ für mindestens ein $x \in X$ gilt.

Das wichtigste Ergebnis dieses Abschnittes ist das Theorem 2.2. Es enthält analoge Aussagen wie Theorem 2.1, ergänzt um eine Eindeutigkeitsaussage.

Theorem 2.2. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A4**.

(a) Es gibt eine Lösung $(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ *der Gleichung*

$$u + \varphi = LTu. \tag{2.32}$$

(b) Ist $(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ *Lösung von (2.32), so gilt* $v(x) = \varphi^*$ *für alle* $x \in X$*. Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existieren* ε*-optimale stationäre Strategien für beide Spieler.*

(c) Sind (u_1, φ^*) *und* (u_2, φ^*) *Lösungen von (2.32), so gilt* $u_2 = u_1 + const.$

Auch hier werden wir vor dem Theorem 2.2 einige Hilfssätze beweisen. Wir betrachten zunächst wieder eine parametrische Klasse von Funktionalgleichungen.

Lemma 2.10. *(a) Für jedes* $\eta \in \mathbb{R}$ *besitzt die Funktionalgleichung*

$$u = \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \{r_{fg} - (1 - \zeta_{fg})\eta + P_{fg}u\} \tag{2.33}$$

eine eindeutige Lösung u_η.

(b) Sei $\gamma_\eta := \mu u_\eta$*. Dann hängt* γ_η *nichtwachsend und stetig von* η *ab.*

Beweis. (a) Für festes η und fixierte Strategien $(f, g) \in \mathbf{F}$ definieren wir einen Operator $\tilde{T}^\eta_{fg} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ durch

$$\tilde{T}^\eta_{fg} u = r_{fg} - (1 - \zeta_{fg})\eta + P_{fg}u$$

für $u \in \mathcal{V}$. Unter Anwendung von (2.13) und (2.12) erhalten wir für $u_1, u_2 \in \mathcal{V}$

$$|\tilde{T}^\eta_{fg} u_1(x) - \tilde{T}^\eta_{fg} u_2(x)| = |P_{fg}(u_1 - u_2)(x)| \leq \lambda V(x) ||u_1 - u_2||_V.$$

Mit $L\tilde{T}^\eta u(x) := \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \tilde{T}^\eta_{fg} u(x)$ gilt wegen

$$\tilde{T}^\eta_{fg} u_2(x) - \lambda V(x) ||u_1 - u_2||_V \leq \tilde{T}^\eta_{fg} u_1(x) \leq \tilde{T}^\eta_{fg} u_2(x) + \lambda V(x) ||u_1 - u_2||_V$$

die Ungleichungskette

$$L\tilde{T}^\eta u_2(x) - \lambda V(x) ||u_1 - u_2||_V \leq L\tilde{T}^\eta u_1(x) \leq L\tilde{T}^\eta u_2(x) + \lambda V(x) ||u_1 - u_2||_V.$$

Dies ist äquivalent zu

$$|L\tilde{T}^{\eta}u_1(x) - L\tilde{T}^{\eta}u_2(x)| \leq \lambda V(x)||u_1 - u_2||_V.$$

Also ist $L\tilde{T}^{\eta}$ eine Kontraktion, das heißt,

$$||L\tilde{T}^{\eta}u_1 - L\tilde{T}^{\eta}u_2||_V \leq \lambda||u_1 - u_2||_V.$$

Aus Banachs Fixpunktsatz folgt die Behauptung.

(b) Seien η_1, η_2 reelle Zahlen mit $\eta_1 < \eta_2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
u_{\eta_1} &= L\tilde{T}^{\eta_1}u_{\eta_1} \\
&= \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta_1 + P_{fg}u_{\eta_1}\} \\
&\geq \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta_2 + P_{fg}u_{\eta_1}\} \\
&= L\tilde{T}^{\eta_2}u_{\eta_1}
\end{aligned}$$

Da P_{fg} nach Lemma 2.1(b) für jedes Paar $(f,g) \in \mathbf{F}$ eine isotone Abbildung ist, müssen auch $\tilde{T}^{\eta_2}_{fg}$ und $L\tilde{T}^{\eta_2}$ isoton sein. Wenden wir $L\tilde{T}^{\eta_2}$ wiederholt an, so ergibt sich

$$u_{\eta_1} \geq L\tilde{T}^{\eta_2}u_{\eta_1} \geq ... \geq (L\tilde{T}^{\eta_2})^n u_{\eta_1}$$

für alle n. Es gilt jedoch $u_{\eta_2} = \lim_{n\to\infty}(L\tilde{T}^{\eta_2})^n u_{\eta_1}$ (Banachscher Fixpunktsatz), also $u_{\eta_1} \geq u_{\eta_2}$. Schließlich ist $\gamma_{\eta_1} = \mu u_{\eta_1} \geq \mu u_{\eta_2} = \gamma_{\eta_2}$.
Um die Stetigkeit zu beweisen, wollen wir zunächst mittels vollständiger Induktion zeigen, dass

$$u_{\eta_1} \leq (L\tilde{T}^{\eta_2})^{n+1}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1)\sum_{k=0}^{n}\lambda^k V \tag{2.34}$$

für alle $n = 0, 1, 2, ...$ gilt.
Dazu bemerken wir, dass wir für jedes beliebige c, $\eta \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{V}$ mit (2.12) folgern können, dass

$$\begin{aligned}
L\tilde{T}^{\eta}(u + cV) &= \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta + P_{fg}(u + cV)\} \\
&= \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta + P_{fg}u + cP_{fg}V)\} \\
&\leq \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta + P_{fg}u + c\lambda V)\} \\
&= L\tilde{T}^{\eta}u + c\lambda V
\end{aligned}$$

gilt. Für $n = 0$ zeigen wir nun (2.34) durch

$$\begin{aligned}
u_{\eta_1} &= \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta_1 + P_{fg}u_{\eta_1}\} \\
&= \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta_2 + P_{fg}u_{\eta_1} + (1-\zeta_{fg})(\eta_2 - \eta_1)\} \\
&\leq \sup_{f\in\mathbf{F}^1}\inf_{g\in\mathbf{F}^2}\{r_{fg} - (1-\zeta_{fg})\eta_2 + P_{fg}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1)\} \\
&= L\tilde{T}^{\eta_2}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1) \\
&\leq L\tilde{T}^{\eta_2}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1)V.
\end{aligned}$$

Gilt andererseits (2.34) für ein n, so wenden wir $L\tilde{T}^{\eta_2}$ auf beiden Seiten der Ungleichung an und bekommen

$$\begin{aligned}
L\tilde{T}^{\eta_2}u_{\eta_1} &\leq L\tilde{T}^{\eta_2}\{(L\tilde{T}^{\eta_2})^{n+1}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1)\sum_{k=0}^{n}\lambda^k V\} \\
&\leq (L\tilde{T}^{\eta_2})^{n+2}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1)\lambda\sum_{k=0}^{n}\lambda^k V \\
&\leq (L\tilde{T}^{\eta_2})^{n+2}u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1)\sum_{k=1}^{n+1}\lambda^k V.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$u_{\eta_1} \leq (L\tilde{T}^{\eta_2})^{n+2} u_{\eta_1} + (\eta_2 - \eta_1) \sum_{k=1}^{n+1} \lambda^k V + (\eta_2 - \eta_1) V,$$

und demnach gilt (2.34) auch für $n+1$. Gehen wir nun in (2.34) zur Grenze $n \to \infty$ über, erhalten wir

$$u_{\eta_1} \leq u_{\eta_2} + (\eta_2 - \eta_1) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k V = u_{\eta_2} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{1 - \lambda} V,$$

beziehungsweise

$$0 \leq u_{\eta_1} - u_{\eta_2} \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{1 - \lambda} V.$$

Integrieren wir bezüglich μ, so ergibt sich

$$0 \leq \gamma_{\eta_1} - \gamma_{\eta_2} \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{1 - \lambda} \mu V.$$

Wenn wir zeigen, dass $\mu V < \infty$ ist, so haben wir auch die Stetigkeit gezeigt. Nach **A4.d** können wir $(f, g) \in \mathbf{F}$ und $x \in X$ mit $\zeta_{fg}(x) > 0$ wählen. Für diese Wahl folgt aber

$$\begin{aligned}
\mu V &\leq \frac{1}{\zeta_{fg}(x)} \int_X V(t) p_{fg}(dt|x) \\
&= \frac{1}{\zeta_{fg}(x)} \int_X W(t) p_{fg}(dt|x) + \frac{\beta}{\zeta_{fg}(x)} \\
&\leq \frac{\alpha}{\zeta_{fg}(x)} W(x) + \beta + \frac{\beta}{\zeta_{fg}(x)} < \infty
\end{aligned}$$

□

Der Beweis von Theorem 2.2 ist nun einfach.

Beweis. (Theorem 2.2)

(a) Nach Lemma 2.10(b) folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten η^* mit $\eta^* = \gamma_{\eta^*}$. Weiterhin löst $u_{\eta^*} \in \mathcal{V}$ Gleichung (2.33) mit $\eta = \eta^*$. Setzen wir $\eta^* = \gamma_{\eta^*} = \mu u_{\eta^*}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_{\eta^*} &= \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \{ r_{fg} - (1 - \zeta_{fg}) \eta^* + P_{fg} u_{\eta^*} \} \\
&= \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \{ r_{fg} - (1 - \zeta_{fg}) \eta^* + p_{fg} u_{\eta^*} - \zeta_{fg} \mu u_{\eta^*} \} \\
&= \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \{ r_{fg} - (1 - \zeta_{fg}) \eta^* + p_{fg} u_{\eta^*} - \zeta_{fg} \eta^* \} \\
&= LT u_{\eta^*} - \eta^*
\end{aligned}$$

Das Paar (u^*, φ^*) mit $u^* = u_{\eta^*}$ und $\varphi^* = \eta^*$ ist nun eine Lösung von (2.32).

(b) Der Beweis dieser Aussage erfolgt analog zum Beweis von Teil (b) des Theorems 2.1.

(c) Sei u_0 die eindeutig bestimmte Lösung von (2.33) für $\eta = \varphi^*$ in Lemma 2.10. Nach Voraussetzung ist (u_1, φ^*) eine Lösung von (2.32), also ist auch (u^*, φ^*) mit $u^* := u_1 + \varphi^* - \mu u_1$ Lösung von (2.32). Dabei gilt $\mu u^* = \varphi^*$. Wir folgern

$$\begin{aligned}
u^* &= LTu^* - \varphi^* \\
&= \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \{ r_{fg} - (1 - \zeta_{fg}) \varphi^* + p_{fg} u^* - \zeta_{fg} \mu u^* \} \\
&= \sup_{f \in \mathbf{F}^1} \inf_{g \in \mathbf{F}^2} \{ r_{fg} - (1 - \zeta_{fg}) \varphi^* + P_{fg} u^* \}
\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.10(a) folgt $u_0 = u^* = u_1 + const.$ Analog zeigen wir $u_0 = u_2 + const.$ □

2.4 Der Fall $\mu_{fg} = \mu$, $\zeta_{fg} = \zeta$ und $q(n) = (1-\vartheta)\vartheta^n$

Nun wollen wir Annahme **A4** aus dem letzten Abschnitt modifizieren, indem wir anstelle von $q = \delta_1$ voraussetzen, dass q einer geometrische Verteilung mit einem Parameter $\vartheta \in (0,1)$ entspricht. Es soll also $q(n) = (1-\vartheta)\vartheta^n$ für $n = 0, 1, 2, ...$ gelten. Der in (2.3) definierte Übergangskern K^q_{fg} ist dann die Resolvente der durch das Spielen von f und g induzierten Markov-Kette $\{X_n\}$ der Zustände.
Außerdem wollen wir annehmen, dass ζ_{fg} nicht von der Wahl der Strategien f und g abhängt.
Wir gehen also nun von folgenden Voraussetzungen aus:

Annahme A5:
Es existieren meßbare Funktionen $W : X \to [1, \infty)$ und $\zeta : X \to [0,1]$ sowie eine Konstante $\vartheta \in (0,1)$, so dass folgende Aussagen gelten

a Es gibt eine reelle Konstante r_1 mit

$$\sup_{x \in X, a^1 \in A^1(x), a^2 \in A^2(x)} |r(x, a^1, a^2)| \leq r_1 W(x) \tag{2.35}$$

b Es gibt reelle Konstanten $\alpha \in (0,1)$ und $\beta > 0$ mit

$$\int_X W(t) p(dt|x, a^1, a^2) \leq \alpha W(x) + \beta \zeta(x) \tag{2.36}$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$.

c Für jedes Strategienpaar $(f, g) \in \mathbf{F}$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$ mit

$$(1-\vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta^n p^n_{fg}(.|x) \geq \zeta(x)\mu(.) \tag{2.37}$$

für alle $x \in X$.

d Es gilt $\zeta(x) > 0$ für mindestens ein $x \in X$.

Modelle dieser Art werden in [43] untersucht, allerdings unter der Annahme der Existenz einer nichtleeren Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ mit $\zeta = \mathbf{I}_C$. In der Theorie der Markov-Ketten heißt die Menge C *petite*, wenn Bedingung **A5.c** gültig ist.
Auch in diesem Fall ergibt sich die Existenz einer Lösung der Optimalitätsgleichung und von ε-optimalen Strategien:

Theorem 2.3. *Angenommen, es gelten* **A2** *und* **A5***.*

(a) Es gibt eine Lösung $(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ der Gleichung

$$u + \varphi = LTu. \tag{2.38}$$

(b) Ist $(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}$ Lösung von (2.32), so gilt $v(x) = \varphi^*$ für alle $x \in X$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren ε-optimale stationäre Strategien für beide Spieler.

Beweis. Analog zu Lemma 2.2 erhalten wir, dass eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ so existiert, dass es reelle Konstanten $\tilde{\alpha} \in (0,1), \tilde{\beta} > 0$ und $\delta \in (0,1)$ mit

$$\int_X W(t) p(dt|x, a^1, a^2) \leq \tilde{\alpha} W(x) + \tilde{\beta} \mathbf{I}_C(x)$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$ und

$$(1-\vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta^n p^n_{fg}(.|x) \geq \delta \mathbf{I}_C(x) \mu(.)$$

für alle $(f, g) \in \mathbf{F}$ und $x \in X$ gibt.
Die Behauptung folgt dann aus [43], Theorem 5.6. □

2.5 ε-optimale Strategien

In diesem Abschnitt werden wir uns mit hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Sattelpunktbedingung **A2** beschäftigen. **A2** wird im wesentlichen aus 3 Gründen benötigt, und zwar

1. um zu sichern, dass LTu für alle $u \in \mathcal{V}$ wieder in $\mathcal{V}$ liegt und insbesondere meßbar ist,

2. um zu garantieren, dass es Strategien $(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \in \mathbf{F}$ gibt, mit denen sich das Infimum und das Supremum zumindest bis auf ein $\varepsilon > 0$ genau realisieren lässt, das heißt, für die (2.11) gilt, und

3. um die Gleichheit in (2.10) zu sichern.

In der englischsprachigen Literatur werden diese Anforderungen zumeist unter den Begriffen *measurable selection condition* (1.+2.) und *minimax condition* (3.) zusammengefasst (siehe z.B. [28]). Hinreichende Bedingungen werden in verschiedenen *measurable selection theorems* und *minimax theorems* angegeben. Zu finden sind solche Sätze z.B. in [4], [28], [60], [73], [77] bzw. [19],[82],[83].
Wir wollen hier nur einige für **A2** hinreichende Bedingungen angeben, die in der Literatur über stochastische Spiele mit Borelschen Zustands- und Aktionenräumen verwendet werden.
In [30], [37] und [64] werden folgende Bedingungen gestellt:

Annahme MS1:

a Für jeden Zustand $x \in X$ sind die Mengen $A^1(x)$ and $A^2(x)$ kompakt.

b Für alle $(x, a^1, a^2) \in K$ ist $r(x, ., a^2)$ hno. auf $A^1(x)$ und $r(x, a^1, .)$ hnu. auf $A^2(x)$.

c Für alle $(x, a^1, a^2) \in K$ und jede Menge $D \in \mathcal{B}(X)$ sind die Funktionen $p(D|x, ., a^2)$ und $p(D|x, a^1, .)$ stetig auf $A^1(x)$ bzw. $A^2(x)$.

d Für alle $(x, a^1, a^2) \in K$ sind die Funktionen

$$\int_X W(t)p(dt|x, ., a^2) \text{ and } \int_X W(t)p(dt|x, a^1, .)$$

stetig auf $A^1(x)$ bzw. $A^2(x)$.

e Es gibt eine Konstante $\vartheta > 0$ mit

$$\int_X W(t)p(dt|x, a^1, a^2) \leq \vartheta W(x)$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$.

Dabei bedeutet wie üblich hno. *halbstetig nach oben* und hnu. *halbstetig nach unten*. Wir bemerken, dass **MS1.e** aus **A1.b** folgt, wenn wir $\vartheta = \alpha + \beta$ setzen.
Andere Bedingungen werden von Rieder in [75] verwendet:

Annahme MS2:

a Die mengenwertige Abbildung $x \mapsto A^1(x)$ ist hno.

b Für jeden Zustand $x \in X$ ist die Menge $A^2(x)$ kompakt.

c Die Funktion $(x, a^1, a^2) \mapsto \int_X u(t)p(dt|x, a^1, a^2)$ ist für jedes $u \in \mathcal{V}$ hnu.

d Die Funktion $(x, a^1, a^2) \mapsto r(x, a^1, a^2)$ ist hnu.

Annahme MS3:

a Es gibt eine Folge $\{\psi_n\}$ meßbarer Abbildungen $\psi_n : X \to A^1$, so dass $\{\psi_1(x), \psi_2(x), ...\}$ dicht in $A^1(x)$ ist für jedes $x \in X$.

b Für jeden Zustand $x \in X$ ist die Menge $A^2(x)$ kompakt.

c Die Funktion $(a^1, a^2) \mapsto \int\limits_X u(t)p(dt|x, a^1, a^2)$ ist für alle $x \in X, u \in \mathcal{V}$ hnu.

d Die Funktion $(a^1, a^2) \mapsto r(x, a^1, a^2)$ ist hnu. für jedes $x \in X$.

Für diese Voraussetzungen gilt der folgende

Satz 2.1. *Jede der Annahmen* **MS 1**, **MS 2** *und* **MS 3** *ist hinreichend für die Gültigkeit von* **A2**.

Beweis. Wir weisen darauf hin, dass die hier verwendeten Beweisideen unter den Annahmen **MS 2** und **MS 3** in [75] skizziert werden.
Für ein beliebiges $u \in \mathcal{V}$ definieren wir eine Funktion $Hu : K \to \mathbb{R}$ durch

$$Hu(x, a^1, a^2) := r(x, a^1, a^2) + \int\limits_X u(y)p(dy|x, a^1, a^2)$$

für alle $(x, a^1, a^2) \in K$. Seien $x \in X$ und $\nu_1 \in P(A^1(x)), \nu_2 \in P(A^2(x))$. Dann folgt aus **A1.a** und **A1.b**, dass $Hu(., \nu_1, \nu_2)$ (definiert wie in (2.1)) in $\mathcal{V}$ liegt, denn $r(., \nu_1, \nu_2) \in \mathcal{V}$ und

$$\begin{aligned}
|\int\limits_X u(y)p(dy|x, \nu_1, \nu_2)| &\leq ||u||_V \int\limits_X V(y)p(dy|x, \nu_1, \nu_2) \\
&\leq ||u||_V \{\alpha V(x) + (1 - \alpha + \zeta(x, \nu_1, \nu_2))\beta\} \\
&\leq ||u||_V (\alpha + 2\beta - \alpha\beta)V(x),
\end{aligned}$$

und die Meßbarkeit erhalten wir mit [11], Korollar 7.29.1.
Außerdem ist mit jeder der Annahmen $Hu(x, a^1, .)$ hnu. auf $A^2(x)$. Für **MS1** folgt dies aus Lemma 3 in [64] und Annahme **MS1.b**, für **MS2** und **MS3** direkt aus den Annahmen **c** und **d**. Damit ist auch $Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ hnu. in ν_2 (siehe z.B. Lemma 4 in [64]).
Weiterhin wird bei jeder der Annahmen $A^2(x)$ als kompakt vorausgesetzt. Nach Propostion 7.22 in [11] ist dann auch $P(A^2(x))$ kompakt.
Nun können wir Fan's Minimax Theorem (siehe [19], Theorem 2) anwenden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
Su(x) &:= \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) \\
&= \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2). \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Dabei wird ausgenutzt, dass $Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ linear in ν_1 und ν_2, und damit sowohl konvex als auch konkav ist.
Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung

$$(x, \nu_2) \mapsto \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) \qquad (2.40)$$

(a) meßbar, und (b) hnu. in ν_2 ist.
Unter **MS1** ist wegen **MS1.b** $Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ hno. in ν_1. Mit der Kompaktheit von $P(A^1(x))$ folgt die Meßbarkeit von (2.40) aus dem Auswahlsatz von Brown und Purves ([17], Corollary 1). Insbesondere gibt es eine stationäre Strategie $f_0 \in \mathbf{F}^1$ mit

$$\sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) = Hu(x, f_0(x), \nu_2),$$

und die Halbstetigkeit in ν_2 folgt aus der Halbstetigkeit der rechten Seite.
Unter **MS2** ist die Abbildung $(x, \nu_1, \nu_2) \mapsto Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ hnu. Mit **MS2.a** ist die mengenwertige Abbildung $x \mapsto P(A^1(x))$ hno. Daher können wir Theorem 1 in [10], S.115, anwenden, das heißt, (2.40) ist hnu. Insbesondere folgen daraus die Aussagen (a) und (b).
Setzen wir schließlich **MS3** voraus, so folgt aus **MS3.a** die Existenz einer Folge (ψ'_n) meßbarer Abbildungen $\psi'_n : X \to P(A^1)$, so dass $\{\psi'_1(x), \psi'_2(x), ...\}$ dicht in $P(A^1(x))$ ist für jedes $x \in X$. Nach **MS3.c** und **d** ist $Hu(x, ., a^2)$ hnu., und somit ist auch $\nu_1 \mapsto Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ hnu. Es folgt

$$\sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) = \sup_n Hu(x, \psi'_n(x), \nu_2).$$

Die rechte Seite ist als abzählbares Supremum meßbarer Funktionen meßbar, damit auch (2.40). Die Halbstetigkeit folgt hier aus Theorem 3 in [10], S.76.
Wir haben also die Meßbarkeit von (2.40) und die Halbstetigkeit nach unten in ν_2 gezeigt. Aus dem Auswahlsatz von Brown und Purves ([17], Corollary 1) und der Kompaktheit von $P(A^2(x))$ folgt, dass es eine stationäre Strategie $g_0 \in \mathbf{F}^2$ gibt, für die

$$\begin{aligned} Su(x) &= \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) \\ &= \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, g_0(x)) \end{aligned} \tag{2.41}$$

gilt. Daraus folgt auch die Meßbarkeit von Su.
Nun wollen wir zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stationäre Strategie $f_\varepsilon \in \mathbf{F}^1$ mit

$$\begin{aligned} Su(x) &= \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) \\ &\leq \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, f_\varepsilon(x), \nu_2) + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.42}$$

existiert.
Unter **MS1** erhalten wir (2.42) durch einfaches Vertauschen der Rollen der Spieler 1 und 2. Insbesondere gilt (2.42) hier sogar für $\varepsilon = 0$.
Unter **MS2** und **MS3** definieren wir für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ eine mengenwertige Abbildung ψ auf X durch

$$\psi(x) := \{\nu_1 \in P(A^1(x)) : \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) > Su(x) - \varepsilon\}.$$

Sei $x \in X$ fest gewählt. Da $Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ unter **MS2** und **MS3** hnu. in (ν_1, ν_2) ist, ist $-Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ hno. in (ν_1, ν_2). Wenden wir Theorem 2 in [10], S. 116, an, so ist

$$\sup_{\nu_2 \in P(A^2(x))} -Hu(x, \nu_1, \nu_2) = - \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2)$$

hno. in ν_1, demzufolge ist $\inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2)$ hnu. in ν_1. Daraus folgt nach Definition, dass die Menge $\psi(x)$ offen ist für jedes $x \in X$. Da $Gr\psi = \{(x, \nu_1) : \nu_1 \in \psi(x)\}$ eine Borelmenge in $X \times P(A^1)$ ist, erhalten wir nach Beispiel 2.10 aus [73] die Existenz einer meßbaren Funktion $f_\varepsilon : X \to P(A^1)$ mit $(x, f_\varepsilon(x)) \in Gr\psi$ für alle $x \in X$, also $f_\varepsilon(x) \in \psi(x)$ für alle $x \in X$. Also ist $f_\varepsilon \in \mathbf{F}^1$ und erfüllt (2.42).
Fassen wir nun (2.39), (2.41) und (2.42) zusammen, so erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} T_{f_\varepsilon g_0} u(x) + \varepsilon &= Hu(x, f_\varepsilon(x), g_0(x)) + \varepsilon \\ &\geq \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, f_\varepsilon(x), \nu_2) + \varepsilon \\ &\geq \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) \\ &= \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, \nu_2) \\ &= \sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, g_0(x)) \\ &\geq Hu(x, f_\varepsilon(x), g_0(x)) = T_{f_\varepsilon g_0} u(x). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\sup_{\nu_1 \in P(A^1(x))} Hu(x, \nu_1, g_0(x)) - \varepsilon \leq T_{f_\varepsilon g_0} u(x) \leq \inf_{\nu_2 \in P(A^2(x))} Hu(x, f_\varepsilon(x), \nu_2) + \varepsilon,$$

und damit auch **A2**. □

Der Beweis des Theorems liefert Anhaltspunkte für mögliche weitere für **A2** hinreichende Bedingungen.
So können andere Bedingungen an die Mengen $A^1(x)$ gestellt werden, die (2.42) implizieren, indem verschiedene der oben erwähnten *measurable selection theorems* verwendet werden.
Zwei in allen 3 Annahmen **MS1-3** gestellte Bedingungen sind die Kompaktheit der Mengen $A^2(x)$ und die Halbstetigkeit nach unten der Funktion $Hu(x, a^1, a^2)$ in a^2, die zur Sicherung der Gültigkeit von (2.39) benötigt werden. Auch in der neueren Literatur zu *minimax theorems* werden diese schon von K. Fan in [19] verwendeten Bedingungen nicht abgeschwächt.

2.6 W-geometrische Ergodizität

In diesem Kapitel möchten wir auf spezielle Eigenschaften der Folge $\{X_n\}$ der Zustände eingehen. Nehmen wir an, die beiden Spieler benutzen stationäre Strategien $f \in \mathbf{F}^1, g \in \mathbf{F}^2$. Wie schon in Kapitel 2.1 dargestellt, ist dann p_{fg}, definiert durch

$$p_{fg}(B|x) := \int\limits_{A^1(x)} \int\limits_{A^2(x)} p(B|x,a,b)g(db|x)f(da|x) \tag{2.43}$$

für $B \in \mathcal{B}(X)$, ein stochastischer Kern von X in sich selbst. Zusammen mit einem Anfangszustand $X_0 = x \in X$ ergibt sich eine (homogene) Markov-Kette $\{X_n\}$ mit p_{fg} als Übergangskern (Beweis siehe [28]). Die n-Schritt-Übergangskerne p^n_{fg} und der Übergangskern K^q_{fg} seien definiert wie in (2.2) und (2.3).
Die im folgenden verwendeten Begriffe aus der Theorie der Markov-Ketten werden in der Monografie von Meyn und Tweedie [55] definiert. Alle diesbezüglichen Bezeichnungen entsprechen denen in [55].
Wir zeigen zunächst, dass unter den Annahmen aus Kapitel 2.2 die Markov-Kette der Zustände $\{X_n\}$ irreduzibel ist.

Lemma 2.11. *Gelten die Annahmen* **A3.b-d***, so existiert für jedes stationäre Strategienpaar* $f \in \mathbf{F}^1, g \in \mathbf{F}^2$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß* ψ_{fg} *auf* $\mathcal{B}(X)$*, so dass die Markov-Kette der Zustände* $\{X_n\}$ ψ_{fg}*-irreduzibel ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.2 gibt es eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ mit (2.18) und (2.19). Aus (2.18) folgt nach Theorem 11.3.4 aus [55], dass $E^{fg}_x(\tau_C) < \infty$ und deshalb $L(x, C) = 1$ für alle $x \in X$ gilt. Sei $x \in X$, $B \in \mathcal{B}(X)$ beliebig. Benutzen wir die Bezeichnung $p^0_{fg}(.|x) := \delta_x(.)$, so gilt:

$$\begin{aligned} U(x,B) &= \sum_{n=1}^{\infty} p^n_{fg}(B|x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X p_{fg}(B|y)p^{n-1}_{fg}(dy|x) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C p_{fg}(B|y)p^{n-1}_{fg}(dy|x) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C \delta\mu_{fg}(B)p^{n-1}_{fg}(dy|x) \\ &\geq \delta\mu_{fg}(B) \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C p^n_{fg}(dy|x) \\ &= \delta\mu_{fg}(B)U(x,C) \geq \delta\mu_{fg}(B)L(x,C) = \delta\mu_{fg}(B) \end{aligned}$$

Ist nun $\mu_{fg}(B) > 0$, so ist auch $U(x, B) > 0$. Mit Proposition 4.2.1(i) in [55] ist damit $\{X_n\}$ μ_{fg}-irreduzibel, und nach Proposition 4.2.2 existiert ein maximales Irreduzibilitätsmaß ψ_{fg}. □

Eine analoge Aussage gilt auch unter den Bedingungen aus Kapitel 2.3:

Lemma 2.12. *Gelten die Annahmen* **A4.b-d***, so ist für jedes stationäre Strategienpaar* $f \in \mathbf{F}^1, g \in \mathbf{F}^2$ *die Markov-Kette der Zustände* $\{X_n\}$ μ*-irreduzibel.*

Beweis. Theorem 3.3 in [86]. □

Für eine Eindeutigkeitsaussage brauchen wir folgende stärkere Annahme, die nach Lemma 2.12 unter **A4.b-d** immer erfüllt ist:

Annahme Irr:
Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß ψ auf $\mathcal{B}(X)$, so dass für jedes Strategienpaar $f \in \mathbf{F}^1, g \in \mathbf{G}$ die Markov-Kette der Zustände $\{X_n\}$ ψ-irreduzibel ist.

Wir verwenden in diesem Kapitel die Gewichtsfunktion W wie sie in **A1** eingeführt wurde. Alle Aussagen lassen sich jedoch auch mit $V = W + const$ anstelle von W treffen. Definieren wir nämlich für eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ die W-Norm durch

$$||u||_W := \sup_{x \in X} \frac{|u(x)|}{W(x)},$$

so ist einerseits für alle $x \in X$

$$|u(x)| \leq ||u||_W W(x) \leq ||u||_W V(x)$$

und deshalb $||u||_V \leq ||u||_W$, andererseits jedoch

$$|u(x)| \leq ||u||_V V(x) = ||u||_V (W(x) + const) \leq ||u||_V (1 + const) W(x)$$

und deshalb $||u||_W \leq ||u||_V (1+const)$. Damit ist $\mathcal{V}$ identisch mit dem Raum der meßbaren Funktionen mit endlicher W-Norm.
Es gelten nun die Aussagen von

Satz 2.2. *Angenommen, die Spieler spielen stationäre Strategien $f \in \mathbf{F}^1, g \in \mathbf{F}^2$. Gelten*

(i) die Bedingungen **A3.b-d**, *d.h. gibt es eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ mit (2.18) und (2.19), und ist W auf C beschränkt,*

oder

(ii) die Bedingungen **A4.b-d**,

so folgt:

(a) $\{X_n\}$ ist eine positiv Harris-rekurrente Markov-Kette mit einem eindeutig bestimmten invarianten Wahrscheinlichkeitsmaß π_{fg}.

(b) Es gilt

$$\int_X W(x)\pi_{fg}(dx) < \infty. \tag{2.44}$$

(c) $\{X_n\}$ ist W-geometrisch ergodisch, das heißt, es existieren $0 < R < \infty$ und $\theta \in (0,1)$ mit

$$|\int_X u(y)p_{fg}^n(dy|x) - \int_X u(y)\pi_{fg}(dy)| \leq W(x)||u||_W R\theta^n \tag{2.45}$$

für alle $u \in \mathcal{V}$, $x \in X$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis. Der Beweis unter den Bedingungen (i) benutzt erneut wesentliche Aussagen aus [55]. Theorem 11.3.4 und Proposition 9.1.7 (ii) beweisen zusammen mit unserem Lemma 2.11 die Harris-Rekurrenz. Theorem 10.4.4 beweist die Existenz eines eindeutig bestimmten invarianten Maßes, und aus der Beschränktheit von W auf C folgt mit Theorem 10.4.10 die Existenz eines endlichen solchen Maßes. Aus der Definition, die auf Seite 116-118 in [55] beschrieben wird, folgt die Aperiodizität von $\{X_n\}$. Hier wird ausgenutzt, dass C eine ν_1-*small set* ist.
Aussage (b) folgt aus Theorem 14.3.7 und Aussage (c) aus Theorem 16.1.2.
Gelten andererseits die Voraussetzungen (ii), dann folgen (a) und (b) aus Theorem 3.3 in [86]. Die W-geometrische Ergodizität der Kette wird in den Lemmata 3.3 und 3.4 in [27] bewiesen. □

Die Eigenschaft der W-geometrischen Ergodizität (auch W-gleichmäßige Ergodizität genannt) und die Existenz des invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes π_{fg} werden in den Arbeiten von Nowak [64], Jaśkiewicz/Nowak [37] und Hernández-Lerma/Lasserre [30] benutzt, um verschiedene Aussagen über das stochastische Spiel herzuleiten. Diese sollen hier zusammenfassend zitiert werden.

Satz 2.3 (Nowak). *Angenommen, es gelten die Voraussetzungen* **MS1** *und* **A3**, *d.h. es gibt eine nichtleere Menge $C \in \mathcal{B}(X)$ mit (2.18) und (2.19). Weiterhin sei W auf C beschränkt.*
Dann hat das Spiel $\mathcal{M}$ einen Wert v, der unabhängig vom Ausgangszustand $x \in X$ ist. Beide Spieler besitzen optimale stationäre Strategien.

Beweis. Siehe Theorem 3 in [64]. □

Satz 2.4 (Jaśkiewicz und Nowak). *Angenommen, es gelten die Voraussetzungen wie in Satz 2.3. Dann gibt es eine Konstante φ und eine Funktion $u \in \mathcal{V}$, so dass*

$$\begin{aligned}\varphi + u(x) &= \min_{\nu_2 \in P(A^2(x))} \max_{\nu_1 \in P(A^1(x))} \{r(x,\nu_1,\nu_2) + \int_X u(y)p(dy|x,\nu_1,\nu_2)\} \\ &= \max_{\nu_1 \in P(A^1(x))} \min_{\nu_2 \in P(A^2(x))} \{r(x,\nu_1,\nu_2) + \int_X u(y)p(dy|x,\nu_1,\nu_2)\}\end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Dabei entspricht φ dem Wert des Spieles.
Weiterhin existieren $f_0 \in \mathbf{F}^1$ und $g_0 \in \mathbf{F}^2$ mit

$$\begin{aligned}\varphi + u(x) &= r(x, f_0(x), g_0(x)) + \int_X u(y)p_{f_0 g_0}(dy) \qquad (2.46)\\ &= \max_{\nu_1 \in P(A^1(x))} \{r(x,\nu_1,g_0(x)) + \int_X u(y)p(dy|x,\nu_1,g_0(x))\} \\ &= \min_{\nu_2 \in P(A^2(x))} \{r(x,f_0(x),\nu_2) + \int_X u(y)p(dy|x,f_0(x),\nu_2)\}\end{aligned}$$

für alle $x \in X$.
Gilt außerdem **Irr**, *so ist die Funktion u bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe Theorem in [37]. Obwohl die Eindeutigkeit von u bis auf eine additive Konstante im Theorem nicht erwähnt wird, wird sie dennoch bewiesen. Für den Beweis dieser Eindeutigkeit ist die Bedingung **Irr** wesentlich, da er mit den selben Argumenten wie der Beweis von Theorem 10.3.7 in [28] arbeitet. Dort wird eine analoge Aussage für den Fall eines Markovschen Entscheidungsmodels bewiesen. Die in [28] verwendete Annahme 10.3.5 entspricht unserer Annahme **Irr** (siehe auch [36]). □

In Abschnitt 2.2 beweisen wir die Aussagen der Sätze 2.3 und 2.4, ohne die Beschränktheit von W auf C zu fordern. Wir erhalten jedoch unter unseren schwächeren Voraussetzungen keine Eindeutigkeitsaussage wie in Satz 2.4.
In der Arbeit von Hernández-Lerma und Lasserre [30] wird der Zusammenhang zwischen Tupeln (φ, u, f_0, g_0), die die Gleichung (2.46) erfüllen, und optimalen stationären Strategien untersucht. Dazu wird die Annahme **Irr** durch die stärkere Annahme **Irr1** ersetzt.

Annahme Irr1:
Es gibt ein σ-endliches Maß ψ auf X und eine strikt positive Dichtefunktion $z : K \times X \to \mathbb{R}$, so dass

$$p(D|x,a^1,a^2) = \int_D z(x,a^1,a^2,y)\psi(dy)$$

für alle $D \in \mathcal{B}(X)$ und $(x,a^1,a^2) \in K$ gilt.

Satz 2.5 (Hernández-Lerma und Lasserre). *Angenommen, es gelten die Voraussetzungen* **MS1**, **A4** *und* **Irr1**.
Dann existiert ein Tupel $(\varphi, u, f, g) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbf{F}^1 \times \mathbf{F}^2$, welches für alle $x \in X$ eine Lösung von

$$\varphi + u(x) = r(x, f(x), g(x)) + \int_X u(y)p_{fg}(dy) \qquad (2.47)$$

ist. Dabei entspricht φ dem Wert des Spieles.
Weiterhin ist ein Tupel (φ, u, f, g) Lösung von (2.47) genau dann, wenn f und g optimale Strategien für die Spieler 1 und 2 sind.

Beweis. Theorem 5.8 in [30]. □

Nach Satz 2.1 impliziert **MS 1** die Existenz eines ε-Sattelpunktes, in diesem Fall sogar für $\varepsilon = 0$. Aus Theorem 2.2 folgt, dass eine Lösung von (2.47) existiert, und zwar nur unter **MS1** und **A4**. Wir benötigen dabei die Existenz einer Dichte, also Annahme **Irr1**, nicht.
In Theorem 2.2 wird auch gezeigt, dass für eine Lösung (φ, u, f, g) von (2.47) die Optimalität von f und g folgt, nicht jedoch die umgekehrte Implikation.

Kapitel 3

Myopische Equilibria in Spielen mit SER-SIT-Struktur

Nachdem in Kapitel 2 Nullsummen-Spiele untersucht wurden, wollen wir uns nun Nicht-Nullsummen-Spielen in Borelschen Zustands- und Aktionenräumen zuwenden.
Nicht-Nullsummen-Spiele mit allgemeiner Struktur sind in der Regel schwierig zu behandeln, siehe Abschnitt 1.3.
Viele ökonomische Anwendungen führen jedoch zu Spielen mit gewissen strukturellen Eigenschaften. Diese Struktur kann genutzt werden, um weiterführende Aussagen herzuleiten. Beispiele hierfür sind *SER-SIT games*, *AR-AT games*, *single-control games* oder *switching-control games*. Eine Übersicht über die verwendeten Modelle und Anwendungen findet der Leser in [20].
Wir wollen uns mit SER-SIT-Spielen beschäftigen. Die Bezeichnung geht auf die Arbeit von Parthasarathy, Tijs und Vrieze [69] zurück und steht für *separable rewards, state independent transitions*. In diesen Spielen ergibt sich die Gewinnfunktion als Summe aus einem Term, der nur von den Aktionen der Spieler abhängt, und einem zweitem Term, der nur vom jeweiligen Zustand des Spieles abhängig ist. Außerdem ist der aktuelle Zustand unerheblich für den Übergang in einen neuen Zustand zu Beginn der folgenden Periode. Das Bewegungsgesetz hängt also nur von den gewählten Aktionen der Spieler ab. Beispiele für Spiele mit einer solchen Struktur sind Mehrlagermodelle, wie sie in Kapitel 4 behandelt werden, oder auch Oligopol-Modelle.
Vor Parthasarathy, Tijs und Vrieze beschäftigte sich schon Sobel in [84] und [32] mit Markovschen Entscheidungsprozessen und Markov-Spielen mit dieser Struktur. Ein Fehler in den Ergebnissen zu Markovschen Entscheidungsprozessen wird in [41] aufgezeigt und korrigiert. Auch das Resultat zu Nash-Equilibria in stochastischen Spielen mit SER-SIT-Struktur gilt nur unter schärferen Bedingungen als in [32] angegeben, wie ein Beispiel in Abschnitt 3.4 zeigt.
Die grundlegende Eigenschaft, die SER-SIT-Spiele besitzen, ist die Existenz *myopischer* Nash-Equilibria. Darunter wollen wir Equilibria aus stationären Strategien im betrachteten Markov-Spiel verstehen, die Equilibria in einem Ein-Perioden-Spiel sind, das sich durch die Parameter des Ausgangsspieles bestimmen lässt.
In [69] wird davon ausgegangen, dass die Mengen der zulässigen Aktionen der Spieler in jedem Zustand gleich sind, während [84] und [32] diese Bedingung nicht stellen. Allen Arbeiten gemeinsam ist die Annahme endlicher Zustands- und Aktionenräume. Unter den Voraussetzungen von [69] ergibt sich die Existenz myopischer Equilibria für alle Anfangszustände, unter den Bedingungen in [84] und [32] existieren diese nur für bestimmte Anfangszustände. Es werden jeweils sowohl diskontierte als auch undiskontierte Spiele betrachtet.
Wir verallgemeinern hier die Annahmen aus [32] auf den Fall Borelscher Zustands- und Aktionenräume. Außerdem charakterisieren wir unter einer zusätzlichen Annahme auch Nash-Equilibria bezüglich aller Anfangszustände. Eine ähnliche Bedingung wird z.B. in einer Arbeit von Kurano [47] vorausgesetzt.
In Abschnitt 3.1 wird das SER-SIT-Spiel definiert, und es werden erste Eigenschaften solcher Spiele hergeleitet. In 3.2 werden bekannte Existenzaussagen für statische Spiele, also Ein-Perioden-Spiele, dargestellt. Diese Aussagen führen uns direkt zu Bedingungen für die Existenz von Nash-Equilibria in zugehörigen Markov-Spielen, wie wir in Abschnitt 3.3 zeigen.
Abschnitt 3.4 untersucht endliche Spiele als Spezialfall. Insbesondere erhalten wir das Resultat aus [69]. Wir geben ein Gegenbeispiel zu Theorem 9-7(a) aus [32] an und formulieren eine korrigierte

Version dieses Theorems für den Durchschnittsgewinn-Fall.

3.1 Grundlegende Annahmen

Folgende Voraussetzungen an die Objekte des Spieles (1.1) sollen erfüllt sein:

Annahme B1:

a Es existieren Borel-meßbare Funktionen $k^i : A^1 \times ... \times A^N \to \mathbb{R}$ und beschränkte Borel-meßbare Funktionen $l^i : X \to \mathbb{R}$ mit

$$r^i(x, a^1, ..., a^N) = k^i(a^1, ..., a^N) + l^i(x) \tag{3.1}$$

für alle $(x, a^1, ..., a^N) \in K$, $i = 1, ..., N$.

b Es gibt einen stochastischen Kern $\tilde{p}$ von $A^1 \times ... \times A^N$ nach X mit

$$p(B|x, a^1, ..., a^N) = \tilde{p}(B|a^1, ..., a^N) \tag{3.2}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(X)$, $(x, a^1, ..., a^N) \in K$.

Spiele, für die die Annahme **B1** gilt, nennen wir SER-SIT-Spiele.
Zur Verkürzung der Notation verwenden wir im folgenden für $\tilde{p}$ die Bezeichnung p.
Aus **B1.b** folgt, dass für einen gegebenen Zustand X_n zum Zeitpunkt $n = 0, 1, 2, ...$ die Verteilung von X_{n+1} nur von den Aktionen A_n^i der Spieler abhängt, nicht aber von X_n.
Nehmen wir an, die Spieler spielen ein Tupel $\pi \in \mathbf{\Pi}$ von Strategien, und das Spiel startet in einem Punkt $x \in X$. Wir betrachten nun den erwarteten Gesamtgewinn nach n Stufen für Spieler i, der durch

$$J_n^i(x, \pi) = E_x^\pi \Big[\sum_{m=0}^{n-1} r^i(X_m, A_m^1, ..., A_m^N) \Big]$$

definiert ist. Die Voraussetzungen in den folgenden Abschnitten werden sichern, dass der Erwartungswert existiert. Unter Annahme **B1** folgt für $i = 1, ..., N$

$$\begin{aligned}
J_n^i(x, \pi) &= E_x^\pi [\sum_{m=0}^{n-1} \{k^i(A_m^1, ..., A_m^N) + l^i(X_m)\}] \\
&= E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} k^i(A_m^1, ..., A_m^N) + E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} l^i(X_m) \\
&= l^i(x) + E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} k^i(A_m^1, ..., A_m^N) \\
&\qquad + E_x^\pi \Big[\sum_{m=1}^{n-1} E_x^\pi (l^i(X_m) | A_{m-1}^1, ..., A_{m-1}^N) \Big] \\
&= l^i(x) - E_x^\pi(l^i(X_n)) \\
&\qquad + E_x^\pi \Big[\sum_{m=0}^{n-1} \{k^i(A_m^1, ..., A_m^N) + E_x^\pi(l^i(X_{m+1}) | A_m^1, ..., A_m^N)\} \Big].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Definieren wir nun meßbare Funktionen G^i durch

$$G^i(a^1, ..., a^N) := k^i(a^1, ..., a^N) + \int_X l^i(y) p(dy|a^1, ..., a^N) \tag{3.4}$$

für $i = 1, ..., N$, so folgt mit (3.3), dass

$$J_n^i(x, \pi) = l^i(x) - E_x^\pi(l^i(X_n)) + E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} G^i(A_m^1, ..., A_m^N)$$

gilt. Division durch n und anschließender Übergang zum liminf für $n \to \infty$ ergibt den erwarteten Durchschnittsgewinn für Spieler i, der sich als

$$J^i(x,\pi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} G^i(A_m^1, ..., A_m^N) - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi (l^i(X_n))$$

schreiben lässt. Da wir l^i als beschränkt angenommen haben, verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite, und wir erhalten

$$J^i(x,\pi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} G^i(A_m^1, ..., A_m^N). \tag{3.5}$$

3.2 Statische Spiele

Im Abschnitt 3.1 haben wir durch (3.4) Funktionen G^i definiert, die nur von den Aktionen der Spieler abhängen. Wir wollen nun Spiele betrachten, in denen Funktionen dieser Art die Auszahlungsfunktionen für die Spieler definieren.
Außerdem sollen diese Spiele nur in einer Periode, sagen wir zum Zeitpunkt $n = 0$, gespielt werden. Jeder Spieler trifft eine Entscheidung, und er erhält eine Auszahlung, die abhängig von den gewählten Aktionen aller Spieler ist. Damit endet das Spiel. Spiele dieser Art werden *statisch* genannt.
Ein statisches Spiel definieren wir als

$$\mathcal{M}_{st} = ((A_{st}^1, \mathcal{B}(A_{st}^1)), ..., (A_{st}^N, \mathcal{B}(A_{st}^N)), F^1, ..., F^N)$$

mit folgenden Objekten:

1. $(A_{st}^i, \mathcal{B}(A_{st}^i)), i = 1, ..., N$, sind Borel-Räume, versehen mit der σ-Algebra der Borelschen Teilmengen,
2. $F^i : A_{st}^1 \times ... \times A_{st}^N \to \mathbb{R}$ sind Borel-meßbare Funktionen ($i = 1, ..., N$).

Jeder Spieler i wählt unabhängig von allen anderen Spielern eine Aktion $a^i \in A_{st}^i$. Anschließend erhält er eine Auszahlung in Höhe von $F^i(a^1, ..., a^N)$.
Die Strategienmenge von Spieler i sei die Menge $P(A_{st}^i)$, die wieder ein Borel-Raum ist. Es macht offenbar keinen Sinn, in einem solchen Spiel zwischen stationären und nichtstationären Strategien zu unterscheiden.
Wir schreiben

$$\tilde{F}^i(\nu_1, ..., \nu_N) := \int\limits_{A_{st}^1} ... \int\limits_{A_{st}^N} F^i(a^1, ..., a^N)\nu_N(da^N)...\nu_1(da^1)$$

für $\nu_1 \in P(A_{st}^1), ..., \nu_N \in P(A_{st}^N)$ und $i = 1, ..., N$.
Ein Nash-Equilibrium in einem solchen Spiel ist ein N-Tupel von Strategien $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \in P(A_{st}^1) \times ... \times P(A_{st}^N)$ mit

$$\tilde{F}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \geq \tilde{F}^i(\nu_1^*, ..., \nu_{i-1}^*, \nu_i, \nu_{i+1}^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.6}$$

für alle $\nu_i \in P(A_{st}^i)$ und alle $i = 1, ..., N$.
Interessant für unsere weiteren Untersuchungen sind hinreichende Bedingungen für die Existenz von Nash-Equilibria in statischen Nicht-Nullsummen-Spielen. Beginnend mit den Arbeiten von Nash [56] und [57] wurde diese Fragestellung in der Literatur zur Spieltheorie ausgiebig untersucht. Wir wollen uns hier auf einige wichtige Resultate beschränken.
Nash bewies 1951 die Existenz eines Equilibriums in Spielen mit endlichen Aktionenmengen:

Satz 3.1 (Nash). *Sind die Mengen A_{st}^i für $i = 1, ..., N$ endlich, so existiert ein Nash-Equilibrium in $\mathcal{M}_{st}$.*

Beweis. Theorem 1 in [57]. □

Der folgende Satz von Nikaido und Isoda [58] verallgemeinert Nash's Satz:

Satz 3.2 (Nikaido und Isoda). *Angenommen, es gelten folgende Bedingungen:*

(a) *Die Mengen A_{st}^i seien kompakte und konvexe Teilmengen eines $\mathbb{R}^{m_i}$ für $i = 1, ..., N$.*

(b) *Die Funktionen $F^i : A_{st}^1 \times ... \times A_{st}^N \to \mathbb{R}$ seien stetig für $i = 1, ..., N$.*

(c) *Für jedes fest gewählte $i = 1, ..., N$ und vorgegebene Aktionen*

$$(a^1, ..., a^{i-1}, a^{i+1}, ..., a^N) \in A_{st}^1 \times ... \times A_{st}^{i-1} \times A_{st}^{i+1} \times ... \times A_{st}^N$$

sei die Funktion

$$F^i(a^1, ..., a^{i-1}, ., a^{i+1}, ..., a^N) : A_{st}^i \to \mathbb{R}$$

konkav.

Dann gibt es ein Tupel $(a^{1*}, ..., a^{N*}) \in A_{st}^1 \times ... \times A_{st}^N$ mit

$$F^i(a^{1*}, ..., a^{N*}) \geq F^i(a^{1*}, ..., a^{i-1*}, a^i, a^{i+1*}, ..., a^{N*})$$

für alle $a^i \in A_{st}^i$ und alle $i = 1, ..., N$.
Insbesondere ist das Tupel $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*)$ mit $\nu_i^* = \delta_{a^{i*}}$ ein Nash-Equilibrium in $\mathcal{M}_{st}$.

Beweis. Siehe Satz 2.4 in [72]. □

Eine weitergehende Verallgemeinerung von Nash's Satz ist der folgende

Satz 3.3 (Owen). *Sind die Mengen A_{st}^i kompakte endlich-dimensionale Räume, und sind die Funktionen $F^i : A_{st}^1 \times ... \times A_{st}^N \to \mathbb{R}$ stetig für $i = 1, ..., N$, so existiert ein Nash-Equilibrium in $\mathcal{M}_{st}$.*

Beweis. Theorem in [67]. □

3.3 Equilibria in Spielen mit SER-SIT-Struktur

Wir kommen nun auf das im Abschnitt 3.1 eingeführte stochastische Spiel (1.1) mit der Annahme **B1** zurück.
Nach Gleichung (3.5) ist für $\pi \in \mathbf{\Pi}$ und $x \in X$

$$J^i(x, \pi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} G^i(A_m^1, ..., A_m^N)$$

mit (3.4)

$$G^i(a^1, ..., a^N) = k^i(a^1, ..., a^N) + \int_X l^i(y) p(dy|a^1, ..., a^N).$$

Definieren wir Funktionen $\tilde{G}^i$ durch

$$\tilde{G}^i(\nu_1, ..., \nu_N) := \int_{A^1} ... \int_{A^N} G^i(a^1, ..., a^N) \nu_N(da^N) ... \nu_1(da^1)$$

für $\nu_1 \in P(A^1), ..., \nu_N \in P(A^N)$ und $i = 1, ..., N$, so können wir folgende Annahme formulieren:

Annahme B2:
Es gibt ein N-Tupel von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \in P(A^1) \times ... \times P(A^N)$ mit

$$\tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \geq \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_{i-1}^*, \nu_i, \nu_{i+1}^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.7}$$

für alle $\nu_i \in P(A^i)$ und alle $i = 1, ..., N$.

Die Gültigkeit dieser Annahme ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Nash-Equilibriums im statischen Spiel

$$((A^1, \mathcal{B}(A^1)), ..., (A^N, \mathcal{B}(A^N)), G^1, ..., G^N).$$

Um die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 übertragen zu können, benötigen wir jedoch weitere Annahmen. Für eine Strategie $\pi^1 = (\pi_0^1, \pi_1^1, ...) \in \mathbf{\Pi}^1$ des ersten Spielers gilt nämlich $\pi_n^1(.|x_0, a_0^1, ..., a_0^N, ..., x_n) \in P(A^1(x_n))$ für beliebige Vorgeschichten $(x_0, a_0^1, ..., a_0^N, ..., x_n) \in H_n$. Nun kann es aber z.B. Zustände x geben, für die unter Annahme **B2** $\nu_1^*(A^1(x)) = 0$ gilt. Startet das Spiel nun in einem solchen Zustand, so muss $\pi_0^1(A^1(x)|x) = 1$ gelten, die Annahme **B2** wäre für Abschätzungen nicht verwendbar.
Befindet sich das Spiel in einem Zustand $x \in X$, und will z.B. Spieler 1 die stationäre Strategie $f \in \mathbf{F}^1$ mit $f(D|x) = \nu_1^*(D)$ für $D \in \mathcal{B}(A^1)$ verwenden, so müssen wir sichern, dass für den betreffenden Zustand $\nu_1^*(A^1(x)) = 1$ gilt.
Sei ein Spieler i fest gewählt. Betrachten wir die durch

$$X^i := \{x \in X | \nu_i^*(A^i(x)) = 1\} \tag{3.8}$$

definierte Teilmenge von X. Befindet sich das Spiel in einem Zustand $x \in X^i$, so hat Spieler i die Möglichkeit, seine Aktion gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung ν_i^* auszuwählen.
Wir zeigen nun, dass $X^i \in \mathcal{B}(X)$ gilt.
Es ist

$$\nu_i^*(A^i(x)) = \int\limits_{A^i(x)} \nu_i^*(da) = \int\limits_{A^i} \mathbf{I}_{A^i(x)}(a)\nu_i^*(da)$$

für alle $x \in X$. Die Abbildung $\psi : X \times A^i \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x,a) = \mathbf{I}_{A^i(x)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in A^i(x) \\ 0 & \text{falls } a \notin A^i(x) \end{cases}$$

ist meßbar, denn es ist

$$\psi^{-1}(1) = \{(x,a) | a \in A^i(x)\} = K^i \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(A^i)$$

nach Voraussetzung (siehe Abschnitt 1.1). Damit ist nach dem Satz von Fubini (siehe z.B. [8]) die Abbildung

$$x \mapsto \int\limits_{A^i} \psi(x,a)\nu_i^*(da) = \nu_i^*(A^i(x))$$

meßbar. Insbesondere ist $X^i \in \mathcal{B}(X)$.
Nun treffen wir folgende

Annahme B3:
Für die durch (3.8) definierten Mengen $X^i, i = 1, ..., N$ soll gelten:

- **a** Die Menge $\tilde{X} := X^1 \cap ... \cap X^N$ ist nichtleer.
- **b** Sei

  $$\tilde{X}^i := X^1 \cap ... \cap X^{i-1} \cap X^{i+1} \cap ... \cap X^N.$$

  Es gilt

  $$\int\limits_{A^1} ... \int\limits_{A^N} p(\tilde{X}^i | a^1, ..., a^N)\nu_N^*(da^N)...\nu_{i+1}^*(da^{i+1})\nu_i(da^i)\nu_{i-1}^*(da^{i-1})...\nu_1^*(da^1) = 1 \tag{3.9}$$

  für alle $\nu_i \in P(A^i)$ und alle $i = 1, ..., N$.

Die Menge $\tilde{X}$ ist die Menge aller Zustände, in denen es für alle Spieler zulässig ist, ihre Aktionen gemäß den Wahrscheinlichkeitsverteilungen $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*)$ auszuwählen. Für Zustände in den Mengen $\tilde{X}^i$ gilt dies nur für jeweils N-1 Spieler.
Wir bemerken, dass aus (3.9)

$$\int\limits_{A^1} ... \int\limits_{A^N} p(\tilde{X}^i | a^1, ..., a^N)\nu_N^*(da^N)...\nu_1^*(da^1) = 1$$

für alle i folgt. Es ist mit $\tilde{X} = \tilde{X}^1 \cap ... \cap \tilde{X}^N$ leicht einzusehen, dass dann auch

$$\int_{A^1} ... \int_{A^N} p(\tilde{X}|a^1, ..., a^N)\nu_N^*(da^N)...\nu_1^*(da^1) = 1 \tag{3.10}$$

gelten muss.
Gegeben sei nun ein Strategientupel $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ mit

$$\pi_n^{i*}(h_n) = \begin{cases} \nu_i^* & \text{falls } x_n \in X^i \\ \textit{beliebig} & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.11}$$

für alle $i = 1, ..., N$ und alle $h_n = (x_0, a_0^1, ..., a_0^N, ..., x_n) \in H_n$.
Eine weitere für uns interessante Zufallsgröße, die Zeit des ersten Eintritts in die Menge $\tilde{X}^i$, sei gegeben durch

$$T^i := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \tilde{X}^i\}$$

für $i = 1, ..., N$, wobei wie üblich das Infimum über die leere Menge gleich ∞ gesetzt wird.
Im folgenden Lemma beweisen wir, dass unter gewissen Bedingungen die Mengen $\tilde{X}^i$ nicht mehr verlassen werden, wenn sie einmal erreicht sind. Außerdem schätzen wir den erwarteten Gewinn für Spieler i in Stufe n unter der Bedingung $T^i = k$ für $n \geq k$ ab.

Lemma 3.1. *Angenommen, es gelten* **B1**, **B2** *und* **B3**.
Sei $\pi = (\pi^1, ..., \pi^N) \in \mathbf{\Pi}$ ein beliebiges Strategientupel und $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ durch (3.11) definiert.
Für jedes $i \in \{1, ..., N\}$ und jedes $k \geq 0$ mit $P_x^{(\pi^i, \pi^{-i*})}(T^i = k) > 0$ gelten

(a)

$$P_x^{(\pi^i, \pi^{-i*})}(X_n \in \tilde{X}^i | T^i = k) = 1 \tag{3.12}$$

(b)

$$E_x^{(\pi^i, \pi^{-i*})}(G^i(A_n^1, ..., A_n^N) | T^i = k) \leq \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.13}$$

für alle $n \geq k$ und alle $x \in X$.

Beweis. Wir zeigen (3.12) und (3.13) für $i = 1$, für alle anderen Spieler verläuft der Beweis analog.
Wir nehmen also an, dass die Spieler die Strategie $(\pi^1, \pi^{2*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ benutzen, wobei $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1$ beliebig gewählt ist. Das Spiel starte in einem Punkt $x \in X$.
Wir wollen zuerst (3.12) durch Induktion über n zeigen. Wir wählen also ein festes $k \geq 0$ mit $P_x^{(\pi^1, \pi^{-1*})}(T^1 = k) > 0$.
Der Zufallsvektor $(X_0, A_0^1, ..., A_0^N, ..., X_{n-1}, A_{n-1}^1, ..., A_{n-1}^N, X_n)$ der Vorgeschichte bis zum Zeitpunkt n sei mit Y_n bezeichnet $(n \geq 1)$, weiterhin sei $Y_0 := X_0 = x$.
Wir betrachten zunächst das auf dem Raum $(X \times A^1 \times ... \times A^N)^\infty$ mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F}$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $P_x^{(\pi^1, \pi^{-1*})}$ (siehe auch Abschnitt 1.1). Das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_x^{(\pi^1, \pi^{-1*})}(.|T^1 = k)$ auf $\mathcal{F}$ bezeichnen wir mit P und die zugehörige Erwartung mit E. Die Randverteilung von P bezüglich $(X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times X$ bezeichnen wir mit P_n für $n \geq 0$. Dann entspricht P_n der Verteilung des Vektors Y_n.
Zu zeigen ist zunächst (3.12), also in verkürzter Schreibweise

$$P(X_n \in \tilde{X}^1) = 1 \tag{3.14}$$

für alle $n \geq k$.
Für $n = k$ gilt (3.14) nach Definition von T^1.
Gelte nun (3.14) für ein $n \geq k$. Es folgt

$$\begin{aligned} P_n((X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1) &= P(Y_n \in (X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1) \\ &= P(X_n \in \tilde{X}^1) = 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Weiterhin haben wir für jedes

$$y_n = (x_0, a_0^1, ..., a_0^N, ..., x_{n-1}, a_{n-1}^1, ..., a_{n-1}^N, x_n) \in (X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1,$$

dass

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} \in \tilde{X}^1 | Y_n = y_n) \\
&\quad = \int\limits_{A^1} ... \int\limits_{A^N} p(\tilde{X}^1 | a^1, ..., a^N) \pi_n^{N*}(da^N | y_n) ... \pi_n^{2*}(da^2 | y_n) \pi_n^1(da^1 | y_n) \\
&\quad = \int\limits_{A^1} ... \int\limits_{A^N} p(\tilde{X}^1 | a^1, ..., a^N) \nu_N^*(da^N) ... \nu_2^*(da^2) \pi_n^1(da^1 | y_n) \\
&\quad = 1
\end{aligned}$$

wegen (3.9). Damit ist

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} \in \tilde{X}^1) &= \int\limits_{(X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times X} P(X_{n+1} \in \tilde{X}^1 | Y_n = y_n) P_n(dy_n) \\
&= \int\limits_{(X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1} P(X_{n+1} \in \tilde{X}^1 | Y_n = y_n) P_n(dy_n) \\
&= \int\limits_{(X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1} P_n(dy_n) \\
&= P_n((X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1) = 1
\end{aligned}$$

wegen (3.15). Also gilt (3.14) auch für $n + 1$, und damit für alle $n \geq k$. Wir bemerken, dass damit auch (3.15) für alle $n \geq k$ gilt.
(3.13) entspricht in verkürzter Schreibweise

$$E(G^1(A_n^1, ..., A_n^N)) \leq \tilde{G}^1(\nu_1^*, ..., \nu_N^*),$$

was nun noch zu zeigen ist.
Ist wieder

$$y_n = (x_0, a_0^1, ..., a_0^N, ..., x_{n-1}, a_{n-1}^1, ..., a_{n-1}^N, x_n) \in (X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
&E(G^1(A_n^1, ..., A_n^N) | Y_n = y_n) \\
&\quad = \int\limits_{A^1} ... \int\limits_{A^N} G^1(a^1, ..., a^N) \pi_n^{N*}(da^N | y_n) ... \pi_n^{2*}(da^2 | y_n) \pi_n^1(da^1 | y_n) \\
&\quad = \int\limits_{A^1} ... \int\limits_{A^N} G^1(a^1, ..., a^N) \nu_N^*(da^N) ... \nu_2^*(da^2) \pi_n^1(da^1 | y_n) \\
&\quad = \tilde{G}^1(\pi_n^1(y_n), \nu_2^*, ..., \nu_N^*) \\
&\quad \leq \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*)
\end{aligned}$$

wegen (3.7) für $i = 1$. Auch hier folgt mit (3.15)

$$\begin{aligned}
&E(G^1(A_n^1, ..., A_n^N)) \\
&= \int\limits_{(X\times A^1\times...\times A^N)^n\times X} E(G^1(A_n^1, ..., A_n^N)|Y_n = y_n)P_n(dy_n) \\
&= \int\limits_{(X\times A^1\times...\times A^N)^n\times \tilde{X}^1} E(G^1(A_n^1, ..., A_n^N)|Y_n = y_n)P_n(dy_n) \\
&\le \int\limits_{(X\times A^1\times...\times A^N)^n\times \tilde{X}^1} \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*)P_n(dy_n) \\
&= \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*) \cdot P_n((X \times A^1 \times ... \times A^N)^n \times \tilde{X}^1) \\
&= \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*),
\end{aligned}$$

also gilt (3.13) für alle $n \ge k$. □

Lemma 3.1 sagt folgendes aus: Spielen alle Spieler $j \neq i$ die Strategien π^{j*}, und erreicht das Spiel in Stufe k einen Zustand $x \in \tilde{X}^i$, so verbleibt das Spiel danach $P_x^{(\pi^i,\pi^{-i*})}$-fast sicher für immer in $\tilde{X}^i$, unabhängig von der Wahl π^i des Spielers i. Der Ein-Stufen-Gewinn ist für alle Zeitpunkte $n \ge k$ nicht größer als $\tilde{G}^i(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*)$.
Die Zeit des ersten Eintritts in die Menge $\tilde{X}$ sei durch

$$T := \inf\{n \ge 0 : X_n \in \tilde{X}\}$$

definiert. Das folgende Lemma untersucht den Fall, dass die Spieler π^* benutzen.

Lemma 3.2. *Angenommen, es gelten* **B1**, **B2** *und* **B3**, *und* $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ *ist durch (3.11) definiert.*
Für jedes $k \ge 0$ *mit* $P_x^{\pi^*}(T = k) > 0$ *gelten*

(a)

$$P_x^{\pi^*}(X_n \in \tilde{X}|T = k) = 1 \tag{3.16}$$

(b)

$$E_x^{\pi^*}[G^i(A_n^1, ..., A_n^N)|T = k] = \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.17}$$

für alle $n \ge k$ *und alle* $x \in X, i = 1, ..., N$.

Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich zu dem von Lemma 3.1. Anstelle von (3.9) benutzen wir (3.10), um (3.16) zu beweisen. (3.17) folgt wie (3.13), nur dass hier keine Abschätzung nach oben benötigt wird, da für $x_n \in \tilde{X}$ jeder der Spieler ν_i^* verwendet. □

Das folgende Theorem trifft eine Aussage über die Existenz von Nash-Equilibria für Anfangszustände in $\tilde{X}$:

Theorem 3.1. *Angenommen, es gelten* **B1**, **B2** *und* **B3**.
Dann ist jedes Strategientupel $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ *mit (3.11) ein Nash-Equilibrium bezüglich* $\tilde{X}$ *für das Spiel* $\mathcal{M}_N$.
Es gilt

$$J^i(x, \pi^*) = \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*)$$

für alle $x \in \tilde{X}$ *und alle* $i = 1, ..., N$.

Beweis. Wir nehmen wieder an, dass die Spieler die Strategie $(\pi^1, \pi^{2*}, ..., \pi^{N*}) = (\pi^1, \pi^{-1*}) \in \mathbf{\Pi}$ spielen, wobei $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1$ beliebig gewählt ist.
Startet das Spiel in $x \in \tilde{X} = \tilde{X}^1 \cap ... \cap \tilde{X}^N$, so ist für jedes $\rho \in \mathbf{\Pi}$ P_x^ρ-fast sicher $T^i = 0$ für alle

$i = 1, ..., N$, und ebenso ist $T = 0$.
Aus (3.12) und (3.13) folgen

$$P_x^{(\pi^i,\pi^{-i*})}(X_n \in \tilde{X}^i) = 1 \tag{3.18}$$

und

$$E_x^{(\pi^i,\pi^{-i*})}(G^i(A_n^1, ..., A_n^N)) \leq \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.19}$$

für alle $n \geq 0$ und alle $i = 1, ..., N$.
Mit (3.5) folgt

$$\begin{aligned} J^1(x, (\pi^1, \pi^{-1*})) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^{(\pi^1,\pi^{-1*})} \sum_{m=0}^{n-1} G^1(A_m^1, ..., A_m^N) \\ &\leq \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*) \end{aligned} \tag{3.20}$$

für alle Anfangszustände $x \in \tilde{X}$.
Gehen wir andererseits davon aus, dass die Spieler das Strategientupel π^* benutzen, so ist wegen $P_x^{\pi^*}(T = 0) = 1$ und Lemma 3.2

$$P_x^{\pi^*}(X_n \in \tilde{X}) = 1 \tag{3.21}$$

und

$$E_x^{\pi^*}(G^1(A_n^1, ..., A_n^N)) = \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.22}$$

für alle $n \geq 0$ und alle $x \in \tilde{X}$.
Es folgt

$$\begin{aligned} J^1(x, \pi^*) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^{\pi^*} \sum_{m=0}^{n-1} G^1(A_m^1, ..., A_m^N) \\ &= \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*) \end{aligned} \tag{3.23}$$

für alle Anfangszustände $x \in \tilde{X}$.
Fassen wir (3.20) und (3.23) zusammen, so gilt

$$\tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*, ..., \nu_N^*) = J^1(x, \pi^*) \geq J^1(x, (\pi^1, \pi^{-1*}))$$

für alle $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1$ und $x \in \tilde{X}$.
Analog beweisen wir die entsprechenden Ungleichungen für die Spieler $i = 2, ..., N$. □

Aus Theorem 3.1 folgt, dass wir unter unseren speziellen Voraussetzungen Nash-Equilibria erhalten können, indem wir Gleichgewichte in einem statischen Spiel bestimmen. So bestimmte Equilibria nennen wir *myopisch*.
Nutzen wir die Ausführungen in Abschnitt 3.2, insbesondere die Sätze 3.1, 3.2 und 3.3, so ergeben sich hinreichende Bedingungen für Annahme **B2**.
Wir wollen nun überlegen, welche hinreichenden Bedingungen es für die Existenz von Nash-Equilibria bezüglich der kompletten Zustandsmenge X gibt.
Dazu treffen wir folgende Annahme:

Annahme B4:
Es gibt ein N-Tupel von Strategien $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}^1, ..., \tilde{\pi}^N) \in \mathbf{\Pi}$, so dass für jedes $i = 1, ..., N$

$$E_x^{(\pi^i,\tilde{\pi}^{-i})} T^i < \infty \tag{3.24}$$

für alle $\pi^i \in \mathbf{\Pi}^i$ und alle $x \in X$ gilt.

Die Bedingung (3.24) bedeutet, dass unabhängig vom Anfangszustand und von der Strategie des

Spielers i die anderen Spieler die Möglichkeit haben, durch Spielen von $\tilde{\pi}^{-i}$ ein Erreichen der Zustandsmenge $\tilde{X}^i$ in endlicher Zeit zu erzwingen.
Es gilt $P_x^{\tilde{\pi}}$-fast sicher $T \leq \max\{T^1, ..., T^N\}$, damit muss auch

$$E_x^{\tilde{\pi}} T < \infty \tag{3.25}$$

gelten.
Wir spezifizieren das Strategientupel $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ aus (3.11) durch

$$\pi_n^{i*}(h_n) = \begin{cases} \nu_i^* & \text{falls } x_n \in X^i \\ \tilde{\pi}_n^i(h_n) & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.26}$$

für alle $i = 1, ..., N$ und alle $h_n = (x_0, a_0^1, ..., a_0^N, ..., x_n) \in H_n$.
Dann gilt das

Theorem 3.2. *Angenommen, es gelten* **B1**, **B2**, **B3** *und* **B4**. *Weiterhin sei k^i beschränkt für alle $i = 1, ..., N$.*
Dann ist das Strategientupel $\pi^* \in \mathbf{\Pi}$ mit (3.26) ein Nash-Equilibrium für das Spiel $\mathcal{M}_N$.
Es gilt

$$J^i(x, \pi^*) = \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \tag{3.27}$$

für alle $x \in X$ und alle $i = 1, ..., N$.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass (1.9) für $i = 1$ gilt, für alle anderen Spieler verläuft der Nachweis analog.
Der Anfangszustand sei $X_0 = x$. Die Spieler 2 bis N benutzen die Strategie $\pi^{-1*} = (\pi^{2*}, ..., \pi^{N*})$ aus (3.26), Spieler 1 möge eine beliebige Strategie $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1$ wählen. Wir schreiben $P := P_x^{(\pi^1, \pi^{-1*})}$ und für den Erwartungswert $E := E_x^{(\pi^1, \pi^{-1*})}$.
Aus Bedingung (3.24) und (3.26) folgt sofort, dass

$$ET^i < \infty \tag{3.28}$$

für alle i gilt.
l^1 und k^1 sind beschränkt, somit auch G^1. Es sei also $|G^1(a^1, ..., a^N)| \leq M$ für eine Konstante M und alle $(a^1, ..., a^N) \in A^1 \times ... \times A^N$.
Es gilt

$$\begin{aligned} J^1(x,(\pi^1, \pi^{-1*})) &= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} E \sum_{m=0}^{n-1} G^1(A_m^1, ..., A_m^N) \\ &= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} E\big[\sum_{m=0}^{n-1} G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k\big] P(T^1 = k). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Damit der Term in der Summe für alle k wohldefiniert ist, setzen wir

$$E[G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k] = 0$$

für k mit $P(T^1 = k) = 0$. Für ein festes n gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} E\big[\sum_{m=0}^{n-1} G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k\big] P(T^1 = k) \\ &\quad = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} E[G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k] P(T^1 = k) \\ &\quad = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{k-1} E[G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k] P(T^1 = k) \\ &\qquad + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=k}^{n-1} E[G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k] P(T^1 = k) \\ &\qquad + \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} E[G^1(A_m^1, ..., A_m^N) | T^1 = k] P(T^1 = k). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Für alle k mit $P(T^i = k) > 0$ gilt wegen (3.13)

$$E[G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T^1 = k] \leq \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N)$$

für alle $m \geq k$. Diese Abschätzung benutzen wir für den mittleren Term auf der rechten Seite von (3.30). In den beiden anderen Termen schätzen wir den bedingten Erwartungswert nach oben durch M ab.
Zusammenfassend ist also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} E\big[\sum_{m=0}^{n-1} G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T^1 = k\big] P(T^1 = k) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{k-1} MP(T^1 = k) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=k}^{n-1} \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N)P(T^1 = k) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} MP(T^1 = k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} kMP(T^1 = k) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N)P(T^1 = k) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} nMP(T^1 = k) \\
&= \frac{1}{n}(M - \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N))\sum_{k=0}^{n-1} kP(T^1 = k) \\
&\quad + \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N)\sum_{k=0}^{n-1} P(T^1 = k) + M\sum_{k=n}^{\infty} P(T^1 = k) \\
&\leq \frac{1}{n}(M - \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N))ET^1 + \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N) + M\sum_{k=n}^{\infty} P(T^1 = k)
\end{aligned}$$

für jedes feste n. Lassen wir n gegen ∞ gehen und beachten wir dabei (3.28), so verschwinden der erste und der letzte Term. Wir bemerken, dass $P(T^1 < \infty) = 1$ gilt. Einsetzen in (3.29) ergibt

$$J^1(x, (\pi^1, \pi^{-1*})) \leq \tilde{G}^1(\nu^*_1, ..., \nu^*_N).$$

Zu zeigen bleibt noch (3.27) für $i = 1$. Nehmen wir also an, dass die Spieler π^* spielen. Es folgt wie oben

$$J^1(x, \pi^*) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} E^{\pi^*}_x\big[\sum_{m=0}^{n-1} G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T = k\big] P^{\pi^*}_x(T = k). \tag{3.31}$$

Wir zerlegen wieder für ein festes n den Term unter dem liminf in drei Summanden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} E^{\pi^*}_x\big[\sum_{m=0}^{n-1} G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T = k\big] P^{\pi^*}_x(T = k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{k-1} E^{\pi^*}_x[G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T = k]P^{\pi^*}_x(T = k) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=k}^{n-1} E^{\pi^*}_x[G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T = k]P^{\pi^*}_x(T = k) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} E^{\pi^*}_x[G^1(A^1_m, ..., A^N_m)|T = k]P^{\pi^*}_x(T = k).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die drei Terme auf der rechten Seite in dieser Reihenfolge mit a_n, b_n und c_n, so folgt für a_n

$$-\frac{M}{n}E_x^{\pi^*}T \leq -\frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1} kP_x^{\pi^*}(T=k) \leq a_n \leq \frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1} kP_x^{\pi^*}(T=k) \leq \frac{M}{n}E_x^{\pi^*}T,$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.32}$$

Für c_n ist

$$-M\sum_{k=n}^{\infty} P_x^{\pi^*}(T=k) \leq c_n \leq M\sum_{k=n}^{\infty} P_x^{\pi^*}(T=k).$$

Es gilt wegen (3.25) $P_x^{\pi^*}(T<\infty)=1$, also auch

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{3.33}$$

Nach Lemma 3.2 gilt für k mit $P_x^{\pi^*}(T=k)>0$

$$E_x^{\pi^*}[G^1(A_m^1,...,A_m^N)|T=k] = \tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*)$$

für alle $m \geq k$, also

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*)P_x^{\pi^*}(T=k) \\ &= \tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*)\sum_{k=0}^{n-1}P_x^{\pi^*}(T=k) - \tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}kP_x^{\pi^*}(T=k) \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet analog zu a_n für $n\to\infty$, also ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*). \tag{3.34}$$

Aus der Existenz der drei Grenzwerte (3.32), (3.33) und (3.34) folgt, dass der Grenzwert der Summe existiert und gleich $\tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*)$ ist.
Eingesetzt in (3.31) ergibt sich

$$J^1(x,\pi^*) = \tilde{G}^1(\nu_1^*,...,\nu_N^*)$$

und damit die Behauptung. □

3.4 Endliche Zustands- und Aktionenräume

In der Arbeit von Parthasarathy, Tijs und Vrieze [69] werden SER-SIT-Spiele mit endlichen Zustands- und Aktionenräumen behandelt.
Dort wird jedoch zusätzlich vorausgesetzt, dass die Menge der zulässigen Aktionen unabhängig vom Zustand ist, in dem sich das Spiel befindet, also $A^i(x)=A^i$ für alle $x\in X, i=1,...,N$. Offensichtlich ist in diesem Fall $X=X^i$ für alle i, und die Annahmen **B3** und **B4** sind trivialerweise erfüllt.
Wegen Satz 3.1 gilt auch Annahme **B2**, wir gehen also zusammengefasst von folgenden Voraussetzungen an unser Spiel $\mathcal{M}_N$ aus:

Annahme PTV:

a Es seien $X=\{1,2,...,N_X\}$ und $A^i=\{1,2,...,N_i\}$ für $i=1,...,N$.

b Es gelte $K^i = X\times A^i$ für $i=1,...,N$.

Nach Satz 3.1 gibt es unter **PTV** ein Tupel von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $(\nu_1^*,...,\nu_N^*)\in P(A^1)\times ...\times P(A^N)$ mit (3.7). Wenden wir Theorem 3.1 auf diesen Fall an, so erhalten wir

Korollar 3.1 (Parthasarathy, Tijs und Vrieze). *Angenommen, es gelten* **PTV** *und* **B1**. *Weiterhin erfülle* $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \in P(A^1) \times ... \times P(A^N)$ *die Bedingungen (3.7).*
Dann ist das Strategientupel $f^* = (f^{1*}, ..., f^{N*}) \in \mathbf{F}$ *mit*

$$f^{i*}(1) = f^{i*}(2) = ... = f^{i*}(N_X) = \nu_i^*$$

für alle $i = 1, ..., N$ *ein Nash-Equilibrium für das Spiel* $\mathcal{M}_N$.
Es gilt

$$J^i(x, f^*) = \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*)$$

für alle $x \in X$ *und alle* $i = 1, ..., N$.

Sobel [84] bzw. Heyman und Sobel [32] untersuchen den allgemeineren Fall einer möglichen Abhängigkeit von $A^i(x)$ von der Wahl des Zustandes $x \in X$. Es zeigt sich jedoch, dass die von ihnen verwendeten Annahmen nicht ausreichen, um die entsprechenden Theoreme über die Existenz von Nash-Equilibria zu beweisen.
Sei $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \in P(A^1) \times ... \times P(A^N)$ ein N-Tupel von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit (3.7). Im endlichen Fall ist

$$\nu_i^* = (\nu_i^*(1), ..., \nu_i^*(N_i)),$$

mit

$$\sum_{j=1}^{N_i} \nu_i^*(j) = 1.$$

Wir definieren Mengen

$$\tilde{A}^i := \{a \in A^i | \nu_i^*(a) > 0\}$$

für $i = 1, ..., N$. Die Menge $\tilde{A}^1 \times ... \times \tilde{A}^N$ entspricht dann der in [32] auf Seite 469 mit A' bezeichneten Menge. Weiterhin sei

$$X' := \{x \in X | \tilde{A}^1 \times ... \times \tilde{A}^N \subset A^1(x) \times ... \times A^N(x)\}$$

die in [32] ebenso genannte Menge. Offensichtlich ist

$$X' = \{x \in X | \tilde{A}^1 \subset A^1(x)\} \cap ... \cap \{x \in X | \tilde{A}^N \subset A^N(x)\},$$

andererseits ist nach (3.8)

$$X^i = \{x \in X | \sum_{a \in A^i(x)} \nu_i^*(a) = 1\}.$$

Wir können schließen, dass

$$X^i = \{x \in X | \tilde{A}^i \subset A^i(x)\} \tag{3.35}$$

gilt, denn aus $\tilde{A}^i \subset A^i(x)$ folgt

$$1 = \sum_{a \in A^i} \nu_i^*(a) = \sum_{a \in \tilde{A}^i} \nu_i^*(a) \leq \sum_{a \in A^i(x)} \nu_i^*(a) \leq 1,$$

also

$$\sum_{a \in A^i(x)} \nu_i^*(a) = 1. \tag{3.36}$$

Andererseits ergibt sich aus $\tilde{A}^i \not\subset A^i(x)$ die Existenz eines $\tilde{a} \in \tilde{A}^i$ mit $\tilde{a} \notin A^i(x)$. Dann ist aber

$$\sum_{a \in A^i(x)} \nu_i^*(a) + \nu_i^*(\tilde{a}) \leq \sum_{a \in A^i} \nu_i^*(a) = 1,$$

also

$$\sum_{a\in A^i(x)} \nu_i^*(a) < 1.$$

Folglich gilt (3.36) gdw. $\tilde{A}^i \subset A^i(x)$, und damit (3.35). Wir erhalten

$$\tilde{X} = X^1 \cap ... \cap X^N = \{x \in X|\tilde{A}^1 \subset A^1(x)\} \cap ... \cap \{x \in X|\tilde{A}^N \subset A^N(x)\} = X'.$$

Gilt auch Annahme **B3**, so folgt für jedes $i = 1, ..., N$ aus (3.9) insbesondere

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{a^1\in A^1} ... \sum_{a^N\in A^N} p(\tilde{X}^i|a^1, ..., a^N)\nu_N^*(a^N)...\nu_1^*(a^1)\\
&= \sum_{a^1\in \tilde{A}^1} ... \sum_{a^N\in \tilde{A}^N} p(\tilde{X}^i|a^1, ..., a^N)\nu_N^*(a^N)...\nu_1^*(a^1)\\
&\leq \sum_{a^1\in \tilde{A}^1} ... \sum_{a^N\in \tilde{A}^N} \nu_N^*(a^N)...\nu_1^*(a^1) = 1
\end{aligned}$$

und damit

$$p(\tilde{X}^i|a^1, ..., a^N) = 1$$

für alle $(a^1, ..., a^N) \in \tilde{A}^1 \times ... \times \tilde{A}^N$.
Wegen $X' = \tilde{X} = \tilde{X}^1 \cap ... \cap \tilde{X}^N$ folgt

$$p(X'|a^1, ..., a^N) = 1 \tag{3.37}$$

für alle $(a^1, ..., a^N) \in \tilde{A}^1 \times ... \times \tilde{A}^N$.
Die Formel (3.37) entspricht Voraussetzung IV' auf Seite 469 in [32]. Wir haben also gezeigt, dass diese Voraussetzung aus unserer Annahme **B3** folgt. Die umgekehrte Implikation gilt jedoch offensichtlich im allgemeinen nicht.
Aus unserem Theorem 3.1 ergibt sich

Korollar 3.2. *Angenommen, es gilt* **PTV.a**, **B1** *und* **B3**. *Weiterhin erfülle* $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \in P(A^1) \times ... \times P(A^N)$ *die Bedingungen (3.7).*
Dann ist das Strategientupel $f^* = (f^{1*}, ..., f^{N*}) \in \mathbf{F}$ *mit*

$$f^{i*}(x) = \begin{cases} \nu_i^* & \textit{falls } x \in X^i \\ \textit{beliebig} & \textit{sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1, ..., N$ *ein Nash-Equilibrium bezüglich* $X' = \tilde{X}$ *für das Spiel* $\mathcal{M}_N$.

Auf den ersten Blick scheint diese Aussage schwächer zu sein als Theorem 9-7(a) in [32], da dort an Stelle von **B3** nur (3.37) vorausgesetzt wird. Das folgende einfache Beispiel zeigt jedoch, dass (3.37) für die Aussagen des Theorems nicht hinreichend ist. Mithin gelten Theorem 9-7 und auch Theorem 9-6 aus [32] nicht in der im Buch angegebenen Form, sondern nur unter der stärkeren Voraussetzung **B3**.

Beispiel. Wir betrachten das folgende Zwei-Personen-SER-SIT-Spiel:
Seien $X = A^1 = A^2 = \{1, 2\}$ und $K^1 = K^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$. Befindet sich das Spiel im Zustand 1, so können beide Spieler zwischen den Aktionen 1 und 2 wählen, im Zustand 2 gibt es nur eine zulässige Aktion, nämlich 2, d.h., $A^1(1) = A^2(1) = \{1, 2\}$, $A^1(2) = A^2(2) = \{2\}$.
Das (vom Zustand unabhängige) Bewegungsgesetz sei durch

$$p(\{1\}|1, 1) = p(\{1\}|2, 1) = p(\{2\}|1, 2) = p(\{2\}|2, 2) = 1$$

gegeben. Spieler 2 hat also die vollständige Kontrolle über den Zustand des Spieles in der kommenden Periode. Wählt er x, so bewegt sich das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 1 nach x für $x = 1, 2$.
Schließlich mögen die Gewinnfunktionen folgende Gestalt besitzen:
$k^1(1, 1) = 2, k^1(1, 2) = 1, k^1(2, 1) = 1, k^1(2, 2) = 0, l^1(1) = l^1(2) = 0$
$k^2(1, 1) = 1, k^2(1, 2) = 0, k^2(2, 1) = 0, k^2(2, 2) = 2, l^2(1) = l^2(2) = 0$
Es ergibt sich $G^i(a, b) = k^i(a, b)$ für $a, b \in \{1, 2\}$ und $i = 1, 2$.

Nun erfüllt das Paar $(\nu_1^*, \nu_2^*) \in P(A^1) \times P(A^2)$ mit $\nu_1^* = \nu_2^* = (1,0)$ die Bedingungen (3.7). Es ist nämlich

$$\tilde{G}^i(\nu_1^*, \nu_2^*) = \sum_{a \in A^1} \sum_{b \in A^2} G^i(a,b)\nu_2^*(b)\nu_1^*(a) = G^i(1,1) = k^i(1,1)$$

für $i = 1, 2$. Ist $\nu_1 = (\eta_1, 1 - \eta_1)$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{1,2\}$, ist also $\eta_1 \in [0,1]$, so folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^1(\nu_1, \nu_2^*) &= \sum_{a \in A^1} \sum_{b \in A^2} G^1(a,b)\nu_2^*(b)\nu_1(a) \\
&= G^1(1,1)\eta_1 + G^1(2,1)(1-\eta_1) = 2\eta_1 + 1 - \eta_1 = 1 + \eta_1 \\
&\leq 2 = G^1(1,1) = \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*),
\end{aligned}$$

also (3.7) für $i = 1$. Ebenso ist für $\nu_2 = (\eta_2, 1 - \eta_2)$ mit $\eta_2 \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^2(\nu_1^*, \nu_2) &= \sum_{a \in A^1} \sum_{b \in A^2} G^2(a,b)\nu_2(b)\nu_1^*(a) \\
&= G^2(1,1)\eta_2 + G^2(1,2)(1-\eta_2) = \eta_2 \\
&\leq 1 = G^2(1,1) = \tilde{G}^2(\nu_1^*, \nu_2^*),
\end{aligned}$$

also (3.7) für $i = 2$. Mit obigen Bezeichnungen ist $\tilde{A}^1 = \tilde{A}^2 = \{1\}$ und damit $X^1 = X^2 = X' = \{1\}$. Voraussetzung IV' in [32] ist erfüllt, denn $p(\{1\}|1,1) = 1$.
Startet das Spiel in X', also in 1, und spielen die Spieler Strategien $(f^*, g^*) \in \mathbf{F}^1 \times \mathbf{F}^2$ mit

$$f^*(1) = \nu_1^* = g^*(1) = \nu_2^* = (1,0),$$

so verweilt das Spiel für immer im Zustand 1, und die erwarteten Durchschnittsgewinne für die Spieler sind $J^1(1, f^*, g^*) = \tilde{G}^1(\nu_1^*, \nu_2^*) = 2$ und $J^2(1, f^*, g^*) = \tilde{G}^2(\nu_1^*, \nu_2^*) = 1$. Das Paar (f^*, g^*) ist jedoch kein Nash-Equilibrium bezüglich $X' = \{1\}$. Startet das Spiel im Zustand 1, und spielt Spieler 2 anstelle von g^* die Strategie $\tilde{g}$ mit $\tilde{g}(1) = (0,1)$, so springt das Spiel in den Zustand 2 und verweilt dort für immer. Der erwartete Durchschnittsgewinn für Spieler 2 ergibt sich durch

$$\begin{aligned}
J^2(1, f^*, \tilde{g}) &= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n}(G^2(1,2) + \sum_{m=1}^{n-1} G^2(2,2)) \\
&= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n}(0 + 2(n-1)) = 2 > J^2(1, f^*, g^*).
\end{aligned}$$

Spieler 2 kann also durch Spielen einer anderen Strategie einen höheren Gewinn erzielen, wenn Spieler 1 weiter f^* spielt. Es zeigt sich sogar, dass jedes Strategienpaar $(\pi, \tilde{g})$ ein Nash-Equilbrium bezüglich X ist, da in diesem Fall unabhängig von der Strategie $\pi \in \mathbf{\Pi}$ des Spielers 1 sein erwarteter Durchschnittsgewinn gleich 0 ist. Das Spiel wird sich spätestens zum Zeitpunkt $n = 1$ im Zustand 2 befinden, der ein absorbierender Zustand ist. Spieler 1 erhält dann in jeder Stufe einen Gewinn von 0, während Spieler 2 in jeder Stufe 2 erhält. Die Nash-Equilibria $(\pi, \tilde{g})$ ergeben sich jedoch nicht aus der Betrachtung des statischen Spieles (Bimatrix-Spieles) mit den Auszahlungsfunktionen G^1 und G^2, also nicht aus Theorem 3.1, da hier Annahme **B3** verletzt ist. Durch das Spielen von $\tilde{g}$ kann Spieler 2 erzwingen, dass das Spiel die Menge $X' = \tilde{X}$ verlässt. Genau dies verhindert die Aufnahme von **B3**.
Weiter bemerken wir, dass auch Annahme **B4** hier nicht gilt. Startet das Spiel nämlich in Zustand 2, so verweilt das Spiel für immer dort. Für jedes Strategienpaar (π^1, π^2) ist dann

$$P_2^{(\pi^1, \pi^2)}(T^i = \infty) = 1$$

für $i = 1, 2$ also gibt es kein Strategienpaar $(\tilde{\pi}^1, \tilde{\pi}^2) \in \mathbf{\Pi}$ mit (3.24).

Natürlich können wir Theorem 3.2 auch auf den endlichen Fall anwenden. Es ergibt sich

Korollar 3.3. *Angenommen, es gilt* **PTV.a**, **B1**, **B3** *und* **B4**. *Weiterhin erfülle* $(\nu_1^*, ..., \nu_N^*) \in P(A^1) \times ... \times P(A^N)$ *die Bedingungen (3.7).*
Dann ist das Strategientupel $\pi^* \in \mathbf{\Pi}$ *mit (3.26) ein Nash-Equilibrium für das Spiel* $\mathcal{M}_N$.
Es gilt

$$J^i(x, \pi^*) = \tilde{G}^i(\nu_1^*, ..., \nu_N^*)$$

für alle $x \in X$ *und alle* $i = 1, ..., N$.

Kapitel 4

Anwendung auf nichtkooperative Mehrlagermodelle

Die Erkenntnisse aus Kapitel 3 wollen wir nun auf spezielle Probleme anwenden, die aus der Lagerhaltungstheorie stammen.
Die Lagerhaltungstheorie ist ein klassisches Anwendungsgebiet des Operations Research. Es gibt eine sehr umfangreiche Literatur zu den verschiedensten Problemen, die bei der Lagerhaltung untersucht werden können. Für eine Einführung in die verwendeten Modelle und Bezeichnungen sowie eine Übersicht über zugehörige Resultate verweisen wir z.B. auf [3], [7] oder [70].
Das unserer Anwendung zugrunde liegende Modell geht auf Arrow, Harris und Marschak [2] zurück, es wird deshalb häufig als *AHM-Modell* bezeichnet. Kennzeichnend für das AHM-Modell sind vor allem eine periodische Überwachung des Lagerbestandes in festen Zeitabständen sowie ein zufälliger Bedarf.
In vielen Standardmodellen mit einem einzelnen zu lagernden Produkt erweist sich eine stationäre (s, S)-Strategie (engl. *base stock policy*) als optimal, wenn die Produktions- bzw. Bestellkosten sich aus einem festen und einem linearen Term zusammensetzen. Bei einer solchen Strategie produziert (bestellt) der Entscheider nichts, wenn das Lagerniveau über einer Schranke s liegt, fällt es unter s, so wird der Lagerbestand auf $S \geq s$ angehoben. Verschwindet der fixe Term bei den Bestellkosten, so ist häufig $s = S$, und wir sprechen von (S, S)-Strategien. Wir bemerken hier, dass letzterer Fall wesentlich einfacher zu behandeln ist.
Klassische Resultate zur Optimalität dieser Strategien stammen von Scarf [76] für das n-Perioden-Problem und von Iglehart [33], [34] bzw. Veinott und Wagner [88] für das diskontierte Modell und das Durchschnittskosten-Modell. Eine neuere Diskussion dieser Resultate enthält [12].
Seit Mitte der sechziger Jahre wurden viele Forschungsergebnisse zu diesen Modellen veröffentlicht, die sich mit Optimalitätsbedingungen und auch mit der Berechnung der optimalen (s, S)-Strategien befassen. Eine ausführliche Liste mit entsprechenden Referenzen findet sich z.B. in [70].
Veinott [87] und Ignall und Veinott [35] untersuchen den allgemeineren Fall eines Mehrproduktsystems. Auch in diesen Modellen lässt sich häufig die Optimalität einer Strategie beweisen, bei der das Lagerniveau bis auf einen Vektor S aufgestockt wird, wenn es in einer gewissen Menge σ liegt. Jedoch kann die Optimalität i.a. nur für bestimmte Anfangszustände gezeigt werden, während die Struktur der optimalen Strategie für andere Anfangszustände offen bleibt. Für eine bezüglich aller Anfangszustände optimale Strategie müssen stärkere Bedingungen gefordert werden, wie z.B. die *substitute property* in [35]. In [87] und [35] werden ausschließlich lineare Bestellkosten untersucht, während in [38], [39] und [42] ein fixer Bestellkostenanteil einbezogen wird. Neuere Ergebnisse finden sich in [13] und [14].
Relativ wenig Aufmerksamkeit fanden bisher Mehrlagermodelle, bei denen mehrere Entscheider mit verschiedenen Zielfunktionen konkurrieren. Unter bestimmten Bedingungen kann das Problem als Nicht-Nullsummen-Markov-Spiel aufgefasst werden. Interessant ist dann u.a. die Frage nach der Existenz von Nash-Equilibria.
In einigen diesbezüglichen Artikeln wird als zusätzliche Entscheidungsvariable der Preis der Produkte untersucht, so von Levitan und Shubik [48] oder Kirman und Sobel [40]. In [48] wird ein statisches Spiel untersucht, während in [40] von einem dynamischen Modell ausgegangen wird. In beiden Fällen wird die Existenz von Nash-Equilibria gezeigt. Die Equilibrium-Strategien der einzelnen Spieler im dynamischen Spiel von Kirman und Sobel haben eine (S, S)-Struktur. Auch hier wird die Optimalität (im Sinne eines Equilibriums) dieser Struktur jedoch nur für Anfangszustände "unterhalb" von S

bewiesen.
Andere Arbeiten zu Lagerhaltung unter einer Konkurrenzsituation sind z.B. [49] und [6]. In [49] wird ist die Lieferzeit eine zusätzliche Entscheidungsvariable, in [6] wird unter anderem von der Möglichkeit eines Systemausfalls ausgegangen.
Eine weitere Möglichkeit, Erkenntnisse aus der Spieltheorie für Lagerhaltungsprobleme zu nutzen, wird in Arbeiten von Girlich und Küenle, z.B. in [24], [25] und [42], untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, dass ein Parameter der Bedarfsverteilung unbekannt ist. Modelliert man dieses Problem als Nullsummen-Spiel gegen die Natur, so erhält man unter entsprechenden Voraussetzungen die Existenz Min-Max-optimaler (s, S)- bzw. (σ, S)-Strategien.
In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir nun ein Mehrlager-Modell, das sich in Form eines SER-SIT-Spieles wie in Kapitel 3 behandelt schreiben lässt. In Abschnitt 4.1 wird das entsprechende Modell vorgestellt. Dabei werden größtenteils die Bezeichnungen aus [35] verwendet. Insbesondere wird der Aktionsvektor nicht mehr mit a, sondern mit y bezeichnet. Der Linie der vorangegangenen Kapitel folgend sprechen wir von einer Maximierung des Gewinnes im Gegensatz zur in der Lagerhaltungsliteratur üblichen Kostenminimierung. Zusätzlich ist im Modell ein Verkaufserlös vorgesehen, der in anderen Modellen als Teil der Lager- und Fehlmengenkosten interpretiert werden kann. Weiterhin sprechen wir von einer Produktion der Güter im Gegensatz zur häufig üblichen Bestellung bei einem Dritten.
Eine entscheidende Voraussetzung für das Vorliegen einer SER-SIT-Struktur ist die Linearität der Produktionskosten. Es sind also kein fixer Kostenanteil vorgesehen.
In 4.2 werden Annahmen an das Mehrlagermodell getroffen, die die Existenz von Nash-Equilibria im untersuchten Spiel sichern, vor allem Stetigkeits- und Konkavitätseigenschaften. Als Korollare zu den Theoremen 3.1 und 3.2 folgt die Existenz von Nash-Equilibria für gewisse Anfangspunkte bzw. unter einer zusätzlichen Annahme an die Bedarfsverteilung für beliebige Anfangspunkte. Die Strategien der einzelnen Spieler in diesem Gleichgewicht besitzen eine (S, S)-Struktur.
Entscheidend für die zweite Aussage ist folgender unter unseren Annahmen gültiger Fakt: Spielt Spieler i eine (S, S)-Strategie, so befindet sich sein Lagerniveau nach einer endlichen Zeit unterhalb von S^i, unabhängig von den Aktionen aller anderen Spieler und vom Anfangszustand.
Wir bemerken, dass es für einen endlichen Planungshorizont oder unter dem Durchschnittsgewinn-Kriterium kein Nash-Equilibrium mit einer solchen Struktur geben muss. Wir nutzen wesentlich die Eigenschaft, dass die Höhe des Gewinns nach endlich vielen Perioden für den erwarteten Durchschnittsgewinn keine Rolle spielt. Unter anderen Voraussetzungen, z.B. einem endlichen Planungshorizont, kann es abhängig vom Lagerbestand der anderen Spieler günstiger sein, eine andere Menge zu produzieren als von der (S, S)-Strategie vorgegeben. Diese Eigenschaft zeigt sich schon bei der Untersuchung von Mehrproduktmodellen, siehe [35].
Im Abschnitt 4.3 geben wir Bedingungen an die Bilanzgleichung und an die Bedarfsverteilung an, die die Gültigkeit der Annahmen aus 4.2 sichern. Insbesondere werden die Fälle "lost sales" und "backlog" behandelt.
Abschnitt 4.4 erweitert ein von Parlar in [68] als statisches Spiel untersuchtes Modell mit austauschbaren Produkten auf den dynamischen Fall. Es werden Eigenschaften des myopischen Equilibriums hergeleitet. Das myopische Equilibrium basiert auf dem Equilibrium eines statischen Spieles, welches die gleiche Struktur wie das Spiel von Parlar besitzt. Deshalb können viele Ideen aus [68] übernommen werden. Insbesondere wird gezeigt, dass das statische Eqilibrium eindeutig bestimmt ist. Im Gegensatz zu [68] werden jedoch kompakte Zustandsräume vorausgesetzt, also eine beschränkte Lagerkapazität. Das gleiche Spiel im diskontierten Fall wird in der kürzlich erschienenen Arbeit von Avşar und Baykal-Gürsoy [5] behandelt. Das Problem wird ähnlich zur Vorgehensweise in [76] bzw. [33] als Grenzwert eines n-stufigen Spieles modelliert. Es ergibt sich ein Nash-Equilibrium in (S, S)-Strategien für Startpunkte "unterhalb" von S. Für andere Anfangszustände wird in [5] im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit keine Aussage getroffen.
Wir bemerken hier, dass sich das Oligopolmodell von Kirman und Sobel aus [40] ebenfalls als ein SER-SIT-Spiel formulieren lässt, auch wenn der Verkaufspreis als weitere Aktionsvariable hinzukommt. Entscheidend ist, dass auch in [40] von linearen Produktionskosten ausgegangen wird. Die Aussagen aus Abschnitt 4.2 gelten deshalb für das Oligopol-Modell entsprechend.
Ein Mehrlagermodell, das kein SER-SIT-Spiel ist, wird in [78] behandelt.
Im letzten Abschnitt 4.5 dieses Kapitels wird eine Verbindung zum Mehrproduktmodell von Veinott hergestellt. Es zeigt sich, dass Theorem 3.1 in [87], welches den diskontierten Fall betrifft, im Durchschnittsgewinn-Fall aus den Betrachtungen in Abschnitt 4.2 gefolgert werden kann. Außerdem wird diese Aussage auf beliebige Anfangszustände erweitert. Ein analoges Ergebnis findet sich in [14].

4.1 Das nichtkooperative Mehrlagermodell

Wir wollen nun die Erkenntnisse aus Kapitel 3 anwenden, um zu Aussagen über die Existenz von Nash-Equilibria in speziellen Spielen zu kommen. Diese Spiele bauen auf folgendem Grundmodell auf: Wir untersuchen eine Konkurrenzsituation von N Spielern. Jeder dieser Spieler besitzt eine Fabrik und ein Lager. Er produziert in der Fabrik ein bestimmtes Gut (Produkt), welches er im Lager aufbewahren kann.
In jeder Stufe des Spieles entsteht ein Bedarf an dem Produkt, welchen der Spieler aus produzierter Menge und gelagerter Menge befriedigt.
Zu Beginn einer jeden Stufe stellen die Spieler fest, welche Menge des eigenen Erzeugnisses und aller von den anderen Spielern verwalteten Produkte gelagert ist. Ein möglicher Gesamt-Lagerbestand ist ein Vektor $x = (x^1, x^2, ..., x^N) \in \mathbb{R}^N$. Die Menge aller möglicherweise auftretenden Lagerbestände stellt den Zustandsraum $X \subset \mathbb{R}^N$ unseres Spieles dar.
Nun muss jeder Spieler i entscheiden, wie hoch seine Produktion sein soll. Zum Zeitpunkt der Entscheidung kennt der Spieler jedoch den Bedarf nicht, der in dieser Periode auftreten wird. Er hat nun die Möglichkeit, durch eine Produktion in Höhe von $a^i \geq 0$ die insgesamt verfügbare Menge an Produkten auf das Niveau $y^i = x^i + a^i$ zu bringen. Die Produktion erfolgt sofort, die Produktionsdauer wird vernachlässigt. Der in der Periode entstehende Bedarf kann also durch eine Produktmenge y^i befriedigt werden. Die möglichen Produktionshöhen seien durch Mengen $A^i(x)$ gegeben, die Mengen der zulässigen Aktionen für Spieler i. Wir schreiben $a := (a^1, ..., a^N)$.
Der Bedarf möge (unabhängig von der Stufe) Werte in einer Borel-Menge $\mathcal{D} \subset [0, \infty)^M$ mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus $P(\mathcal{D})$ annehmen. Wir gehen also davon aus, dass es M Bedarfsklassen gibt. Dabei muss nicht notwendig $N = M$ gelten.
Eine Abhängigkeit der Bedarfsverteilung von den Aktionen der Spieler ist zugelassen.
Wir setzen außerdem voraus, dass der Bedarf in einer Stufe unabhängig von dem in allen anderen Stufen ist. Ist also D_n der reellwertige Zufallsvektor der Dimension M, der den Bedarf in Periode n beschreibt, so möge $D_0, D_1, ...$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvektoren sein.
Nehmen wir an, das Spiel befindet sich in Stufe n in einem Zustand x_n und die Spieler wählen einen Produktionsvektor a_n. Der Vektor der Lagermenge nach der Produktion sei $y_n = x_n + a_n$. Ist $d_n = (d_n^1, ..., d_n^M)$ der Bedarfsvektor in Periode n, so sei der Lagerbestand zu Beginn der folgenden Periode $x_{n+1} = s(y_n, d_n)$ für eine gegebene Borel-meßbare Funktion $s : \mathbb{R}^N \times \mathcal{D} \to X$. Die Gleichung $x_{n+1} = s(y_n, d_n)$ nennen wir *Bilanzgleichung*.
Da in der Bilanzgleichung der Lagerbestand der kommenden Periode für jedes Lager von den Entscheidungen aller Spieler abhängen kann, ergibt sich eine Konkurrenzsituation, die es in Lagerhaltungsproblemen mit nur einem Entscheider nicht gibt. Jeder Spieler kann je nach Gestalt der Funktion s Einfluss auf die Lager der anderen Spieler nehmen.
Betrachten wir also zunächst folgende Anwendung von Modell (1.1):

1. Der Raum der möglichen Zustände sei durch

$$X := [m^1, M^1] \times [m^2, M^2] \times ... \times [m^N, M^N]$$

   definiert, versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen. Dabei seien die Konstanten $m^i \leq M^i$ fest gewählt ($i = 1, ..., N$). Die Zustände entsprechen den zulässigen Lagermengen.

2. Der Raum A^i der Aktionen für Spieler i sei das Intervall $[0, M^i - m^i]$, versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen ($i = 1, ..., N$). Ein Element a^i aus A^i entspricht einer Produktion einer Menge a^i. Zulässig soll also nur eine nicht-negative Produktionsmenge sein.

3. Wir definieren

$$A^i(x) := [0, M^i - x^i]$$

   für alle $x = (x^1, ..., x^N) \in X$.

4. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(.|x, a^1, ..., a^N)$ sei die Verteilung des Zufallsvektors $s(x+a, \xi)$ mit $a = (a^1, ..., a^N)$, wobei ξ die Verteilung $\Phi(x+a, .) \in P(\mathcal{D})$ habe. Die Verteilung des Bedarfes kann also vom Wert $x + a$ abhängig sein. Es folgt, dass

$$p(C|x, a^1, ..., a^N) = p(C|x, a) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{I}_C(s(x + a, t))\Phi(x + a, dt) \tag{4.1}$$

für alle Mengen $C \in \mathcal{B}(X)$ gilt.

5. Entsteht ein Bedarf von d, ist x der aktuelle Zustand und wählt Spieler i die Aktion a^i, so ergebe sich die Auszahlung in der betreffenden Stufe als $g^i(x+a,d) - c^i(a)$ mit $a = (a^1, ..., a^N)$. Dabei seien $g^i : \mathbb{R}^N \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $c^i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Borel-meßbare Funktionen. Wir können $c^i(a)$ als bei der Produktion auftretende Kosten ansehen. In $g^i(x+a,d)$ sind Erträge aus Verkäufen sowie Lager- und Fehlmengenkosten eingeschlossen. Wir definieren

$$L^i(y) := Eg^i(y,\xi) = \int_{\mathcal{D}} g^i(y,t)\Phi(y,dt)$$

für $y \in \mathbb{R}^N$, wobei wir voraussetzen, dass L^i endlich ist, und erhalten

$$r^i(x, a^1, ..., a^N) = r^i(x,a) := L^i(x+a) - c^i(a) \tag{4.2}$$

als Gewinnfunktion für Spieler i, $(i = 1, ..., N)$.

Wir bemerken hier, dass in der Literatur zu Lagerhaltungsmodellen häufig nur von Kosten gesprochen wird, die dann vom jeweiligen Entscheider zu minimieren sind. Wenn in unserem Modell die Funktionen g^i nur Kosten einschließen, also nur negative Werte annehmen, so entspricht eine Maximierung des Gewinnes der Minimierung der Kosten.

In der Formel (4.2) wird eine weitere Konkurrenzsituation ausgedrückt. Neben der Einflussnahme auf die anderen Spieler über die Bilanzgleichung können die Spieler mit ihren Entscheidungen auch die Gewinne der Mitspieler beeinflussen. Dabei kann es vorkommen, dass eine für den eigenen Gewinn günstige Aktion den Gewinn anderer Spieler schmälert. Es ergibt sich die klassische Konfliktsituation eines Spieles.

Wollen wir die Ergebnisse aus Kapitel 3 verwenden, müssen wir die Gültigkeit von Annahme **B1** sichern, es sollten also (3.1) und (3.2) gelten. Dazu erweist es sich als günstig, als die zulässigen Aktionen für die Spieler nicht die Produktionsmengen a zu betrachten, sondern die Lagerniveaus $y = x + a$ nach der Produktion.

Das Lagerniveau nach Produktion für Produkt i ist in der Menge

$$B^i := [m^i, M^i] \tag{4.3}$$

enthalten. Wir schreiben $B := B^1 \times ... \times B^N = X$. Sehen wir nun die Mengen B^i als die Aktionenräume für Spieler i an, so entsprechen die Mengen

$$B^i(x) := \{y^i | y^i = x^i + a^i, a^i \in A^i(x)\} \cap B^i = [x^i, M^i]$$

den Mengen der zulässigen Aktionen für Spieler i. Setzen wir $y = x + a$ in die Formeln (4.1) und (4.2) ein, und verwenden wir dieselben Bezeichnungen, so ist der Übergangskern für unser Spiel durch

$$p(C|x,y) = p(C|y) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{I}_C(s(y,t))\Phi(y,dt) \tag{4.4}$$

und die Gewinnfunktion durch

$$r^i(x,y) = L^i(y) - c^i(y-x) \tag{4.5}$$

gegeben. Schließlich wollen wir folgende Annahme treffen:

Annahme Lin:
Die Produktionskosten seien linear, das heißt,

$$c^i(a) = c^i(a^1, ..., a^N) = \sum_{j=1}^{N} c^i_j a^j \tag{4.6}$$

für gewisse nichtnegative Konstanten c^i_j, $i = 1, ..., N$.

Setzen wir (4.6) in (4.5) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} r^i(x,y) &= L^i(y) - \sum_{j=1}^{N} c_j^i (y^j - x^j) \\ &= L^i(y) - \sum_{j=1}^{N} c_j^i y^j + \sum_{j=1}^{N} c_j^i x^j. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Damit sind (3.1) und (3.2) mit

$$k^i(y) = L^i(y) - \sum_{j=1}^{N} c_j^i y^j$$

und

$$l^i(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j^i x^j$$

erfüllt. Hier zeigt sich auch der Grund für die Annahme, dass der Zustandsraum X kompakt ist. Damit sichern wir die Beschränktheit der Funktionen l^i, die wir in Kapitel 3 benötigt haben.
Die in (3.4) definierten Funktionen ergeben sich durch

$$G^i(y^1, ..., y^N) = L^i(y) - \sum_{j=1}^{N} c_j^i y^j + \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{N} c_j^i s^j(y,t) \Phi(y,dt). \tag{4.8}$$

Annahme **Lin** wird in der Literatur zu Lagerhaltungsmodellen häufig verwendet. Teilweise werden aber zusätzlich zu den linearen Produktionskosten noch fixe Kosten eingeführt, die immer dann auftreten, wenn die Produktionsmenge positiv ist. Eine solche Kostenstruktur führt jedoch nicht zu SER-SIT-Modellen und muss deshalb hier ausgeschlossen werden.
Zur Illustration des eingeführten Modells geben wir ein einfaches Beispiel für ein Mehrlagermodell mit den angeführten Eigenschaften an.

Beispiel. Zwei Spieler konkurrieren um eine Bedarfsklasse. Jeder der Spieler besitzt ein Lager wie oben beschrieben. Die Menge der möglichen Lagerbestände sei $X = [0, M^1] \times [0, M^2]$.
Seien x_n^1 und x_n^2 die Lagerbestände vor der Produktion, y_n^1 und y_n^2 die Lagerbestände nach der Produktion in Stufe n des Spieles. Nun tritt ein zufälliger Bedarf $d_n \in \mathbb{R}$ auf. Dieser möge (von einer übergeordneten Instanz) an die Spieler entsprechend dem Verhältnis ihrer Lagerbestände aufgeteilt werden, Spieler 1 deckt also einen Bedarf von $\frac{y_n^1}{y_n^1+y_n^2} d_n$ und Spieler 2 einen Bedarf von $\frac{y_n^2}{y_n^1+y_n^2} d_n$. Ist $y_n^1 = y_n^2 = 0$, so kann kein Bedarf gedeckt werden.
Zu Beginn von Stufe $n+1$ sei der Lagerbestand der Spieler $i = 1, 2$ durch

$$x_{n+1}^i = s^i(y_n^1, y_n^2, d_n) = (y_n^i - \frac{y_n^i}{y_n^1 + y_n^2} d_n)^+$$

mit $z^+ := \max\{0, z\}$ bestimmt ("lost sales", siehe auch Abschnitt 4.3). An dieser Stelle übt die Entscheidung des anderen Spielers also wegen des Terms $y_n^1 + y_n^2$ im Nenner einen Einfluss auf den Bestand in der nächsten Periode aus.
Der Einstufen-Gewinn für Spieler i in Stufe n sei

$$e^i \max(y_n^i, \frac{y_n^i}{y_n^1 + y_n^2} d_n) - c^i(y_n^i - x_n^i) - h^i(y_n^i - \frac{y_n^i}{y_n^1 + y_n^2} d_n)^+ - q^i(\frac{y_n^i}{y_n^1 + y_n^2} d_n - y_n^i)^+,$$

mit den nichtnegativen reellen Konstanten

c^i Produktionskosten/Einheit für Spieler i,
e^i Ertrag/Einheit für Spieler i,
h^i Lagerkosten/Einheit für Spieler i,
q^i Fehlmengenkosten/Einheit für Spieler i.

Der Restbestand (Lager- und Fehlmengen) wird also linear bewertet. Auch hier beeinflusst der jeweils andere Spieler über den Term $y_n^1 + y_n^2$ die Gewinnfunktion. Im allgemeinen sind die Konstanten so gewählt, dass die Spieler ein Interesse haben werden, einen möglichst großen Bedarfsanteil befriedigen zu können. Andererseits werden durch hohe Lagerbestände die zu erwartenden Lagerkosten steigen. Abhängig von der Entscheidung des anderen Spielers wird es unter gewissen Voraussetzungen an die Bedarfsverteilung ein optimales Lagerniveau für den einzelnen Spieler geben.

4.2 Equilibria in nichtkooperativen Mehrlagermodellen

Durch Annahme **Lin** haben wir gesichert, dass **B1** gilt, es handelt sich bei dem im letzten Abschnitt definierten Modell also um ein SER-SIT-Spiel. Um die Theoreme 3.1 und 3.2 anwenden zu können, müssen wir außerdem auch die Gültigkeit von **B2**, **B3** und **B4** sichern.
In diesem Abschnitt sollen folgende Voraussetzungen für die Elemente des Grundmodells aus Abschnitt 4.1 gelten:

Annahme L1:
Für jeden Spieler $i = 1, ..., N$ gilt:

a Es sei

$$c^i(a) = c^i(a^1, ..., a^N) = \sum_{j=1}^{N} c_j^i a^j$$

für gewisse nichtnegative Konstanten c_j^i, $j = 1, ..., N$ und alle $a = (a^1, ..., a^N) \in \mathbb{R}^N$.

b Die Funktion G^i sei stetig.

c Für jedes fest gewählte $i = 1, ..., N$ und vorgegebene Aktionen

$$(y^1, ..., y^{i-1}, y^{i+1}, ..., y^N) \in B^1 \times ... \times B^{i-1} \times B^{i+1} \times ... \times B^N$$

sei die Funktion

$$G^i(y^1, ..., y^{i-1}, ., y^{i+1}, ..., y^N) : B^i \to \mathbb{R}$$

konkav.

d Es sei $s^i(y, d) \leq y^i$ für alle $y = (y^1, ..., y^N) \in B$ und alle $d \in \mathcal{D}$.

Annahme **L1.a** ist identisch mit **Lin** und wurde aus Gründen der Lesbarkeit nochmals angeführt. Annahme **L1.d** bedeutet inhaltlich, dass nach einer Aufstockung des Lagerniveaus nach Produktion auf $(y^1, ..., y^N)$ die Befriedigung des Bedarfes zu einem niedrigeren Lagerniveau zu Beginn der nächsten Periode führt. Diese Bedingung ist in den meisten relevanten Fällen erfüllt. Eine ausführliche Betrachtung dieser Bedingung folgt in Abschnitt 4.3.
Für die Übergangswahrscheinlichkeit unseres Spieles ist **L1.d** gleichbedeutend mit

$$p([m^1, M^1] \times ... \times (y^i, M^i] \times ... \times [m^N, M^N] | y^1, ..., y^N) = 0 \tag{4.9}$$

für alle $y = (y^1, ..., y^N) \in B$.
Das folgende Lemma zeigt, dass **L1** hinreichend für die Gültigkeit von **B2** und **B3** ist.

Lemma 4.1. *Gelten die Bedingungen* **L1.a-c**, *so gibt es ein Tupel* $S = (S^1, ..., S^N) \in B^1 \times ... \times B^N$ *mit*

$$G^i(S^1, ..., S^N) \geq G^i(S^1, ..., S^{i-1}, y^i, S^{i+1}, ..., S^N) \tag{4.10}$$

für alle $y^i \in B^i$ *und alle* $i = 1, ..., N$.
Insbesondere gilt Annahme **B2** *für* $\nu_i^* = \delta_{S^i}$.
Weiterhin folgt aus Bedingung **L1.d** *die Annahme* **B3**.

Beweis. Durch die Annahmen **L1.a-c** und die Kompaktheit der konvexen Mengen B^i sind die Voraussetzungen des Satzes 3.2 erfüllt, damit ergibt sich sofort die erste Aussage des Lemmas.
Sei nun $S = (S^1, ..., S^N) \in B$ ein Tupel mit (4.10). In unserem speziellen Modell ergeben sich

$$\begin{aligned} X^i &= \{x \in X | \nu_i^*(B^i(x)) = 1\} \\ &= \{x \in X | S^i \in B^i(x)\} \\ &= \{(x^1, ..., x^N) \in X | x^i \leq S^i\} \end{aligned}$$

als die Mengen der Zustände, für die die Wahl der Aktion S^i für Spieler i möglich ist ($i = 1, ..., N$).
Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X^1 \cap ... \cap X^N \\ &= \{(x^1, ..., x^N) \in X | x^j \leq S^j \text{ für alle } j = 1, ..., N\} \\ &= [m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N] \end{aligned}$$

eine nichtleere Teilmenge von X ist, also gilt **B3.a**. Die Gleichung (3.9) aus **B3.b** lautet hier wegen $\nu_i^* = \delta_{S^i}$

$$\int_{B^i} p(\tilde{X}^i | S^1, ..., S^{i-1}, y^i, S^{i+1}, ..., S^N) \nu_i(dy^i) = 1 \tag{4.11}$$

für $i = 1, ..., N$.
Für einen festen Spieler i und eine Aktion $y^i \in B^i$ dieses Spielers bezeichnen wir $(y^i, S^{-i}) := (S^1, ..., S^{i-1}, y^i, S^{i+1}, ..., S^N)$. Es ist nach (4.4)

$$\begin{aligned} &p(\tilde{X}^i | S^1, ..., S^{i-1}, y^i, S^{i+1}, ..., S^N) \\ &\qquad = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{I}_{\tilde{X}^i}(s((y^i, S^{-i}), t)) \Phi((y^i, S^{-i}), dt). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Wegen **L1.d** ist für ein beliebiges $t \in \mathcal{D}$

$$s^j((y^i, S^{-i}), t) \leq S^j$$

für alle $j \neq i$, also

$$s((y^i, S^{-i}), t) \in X^j$$

für alle $j \neq i$ bzw.

$$s((y^i, S^{-i}), t) \in \tilde{X}^i = X^1 \cap ... \cap X^{i-1} \cap X^{i+1} \cap ... \cap X^N.$$

Wir erhalten

$$\mathbf{I}_{\tilde{X}^i}(s((y^i, S^{-i}), t)) = 1$$

für alle $t \in \mathcal{D}$, demnach ist nach (4.12)

$$p(\tilde{X}^i | S^1, ..., S^{i-1}, y^i, S^{i+1}, ..., S^N) = 1$$

unabhängig von der Wahl von $y^i \in B^i$. Insbesondere ist (4.11) richtig, also auch **B3.b**. □

Mit Lemma 4.1 folgt nun die erste wichtige Aussage zur Existenz von Nash-Equilibria bezüglich $\tilde{X}$ als direkte Anwendung von Theorem 3.1:

Korollar 4.1. *Unter der Annahme* **L1** *ist jedes Strategientupel*
$\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ *mit*

$$\pi_n^{i*}(h_n) = \begin{cases} \delta_{S^i} & \text{falls } x_n^i \leq S^i \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1, ..., N$ und alle $h_n = (x_0, y_0, ..., x_n) \in H_n$ ein Nash-Equilibrium für Anfangszustände aus der Menge $[m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$.
Es gilt

$$J^i(x, \pi^*) = G^i(S^1, ..., S^N)$$

für alle $x \in [m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$ und alle $i = 1, ..., N$.

Nehmen wir an, zu Beginn des Spieles hat jeder Spieler i einen Lagerbestand, der nicht größer als S^i ist. Dann sagt Korollar 4.1 aus, dass sich ein Gleichgewicht einstellt, wenn jeder der Spieler in jeder Stufe seinen Lagerbestand durch Produktion auf das Niveau S^i anhebt.
Wenn wir ein Nash-Equilibrium für alle Anfangszustände erhalten wollen, brauchen wir eine Bedingung, die uns die Richtigkeit von Annahme **B4** sichert. Die folgenden Überlegungen orientieren sich an Ideen aus [13]. Wir setzen zusätzlich zu **L1** folgendes voraus:

Annahme L2:
Sei $i \in \{1, ..., N\}$.
Es existieren Konstanten $\delta^i > 0$ und $\theta^i > 0$, so dass für jedes $y = (y^1, ..., y^N) \in B$ gilt:
Sei ξ eine Zufallsvariable mit der Verteilung $\Phi(y, .) \in P(\mathcal{D})$.
Ist $y^i > S^i + \delta^i$, so folgt

$$P(s^i(y, \xi) < y^i - \delta^i) \geq \theta^i. \tag{4.13}$$

Ist $S^i < y^i \leq S^i + \delta^i$, so folgt

$$P(s^i(y, \xi) \leq S^i) \geq \theta^i. \tag{4.14}$$

Annahme **L2** ist praktisch eine Bedingung an die Verteilung des Bedarfes. Für Beispiele verweisen wir den Leser auf die folgenden Abschnitte.
Wir weisen darauf hin, dass die Abschätzungen (4.13) und (4.14) gleichmäßig für alle $y^i > S^i$ gelten sollen.
Man prüft mit Hilfe von (4.4) leicht nach, dass aus (4.13)

$$p([m^1, M^1] \times ... \times [m^i, y^i - \delta^i) \times ... \times [m^N, M^N]|y^1, ..., y^N) \geq \theta^i$$

für alle $y = (y^1, ..., y^N) \in B$ mit $y^i > S^i + \delta^i$ folgt. Nehmen wir **L1.d** hinzu, so erhalten wir

$$p([m^1, M^1] \times ... \times [y^i - \delta^i, y^i] \times ... \times [m^N, M^N]|y^1, ..., y^N) \leq 1 - \theta^i \tag{4.15}$$

für alle $y = (y^1, ..., y^N) \in B$ mit $y^i > S^i + \delta^i$.
Ebenso erhalten wir für alle $y = (y^1, ..., y^N) \in B$ mit $S^i < y^i \leq S^i + \delta^i$ aus (4.14)

$$p([m^1, M^1] \times ... \times [m^i, S^i] \times ... \times [m^N, M^N]|y^1, ..., y^N) \geq \theta^i$$

und mit **L1.d**

$$p([m^1, M^1] \times ... \times (S^i, y^i] \times ... \times [m^N, M^N]|y^1, ..., y^N) \leq 1 - \theta^i. \tag{4.16}$$

Betrachten wir das Strategientupel $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}^1, ..., \tilde{\pi}^N) \in \mathbf{\Pi}$ mit

$$\tilde{\pi}^i_n(h_n) := \delta_{x^i_n} \tag{4.17}$$

für alle $i = 1, ..., N, n = 0, 1, 2, ...$ und alle $h_n = (x_0, y_0, ..., x_n) \in H_n$. Spielt Spieler i die Strategie $\tilde{\pi}$ mit(4.17), so produziert er in keiner der Stufen etwas.
Wir wollen im folgenden zeigen, dass $\tilde{\pi}$ die Annahme **B4** erfüllt. Dazu sind zunächst einige Definitionen nötig.
Wir zerlegen die Mengen $[m^i, M^i]$ für $i = 1, ..., N$ in Teilmengen

$$W^i_k := (S^i + (k-1)\delta^i, S^i + k\delta^i] \quad \cap \quad [m^i, M^i]$$

für $k = 1, 2, ...$, außerdem sei $W^i_0 := [m^i, S^i]$. Eingebettet in X sei

$$Z^i_k := [m^1, M^1] \times ... \times [m^{i-1}, M^{i-1}] \times W^i_k \times [m^{i+1}, M^{i+1}] \times ... \times [m^N, M^N].$$

Offenbar ist

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z^i_k$$

für jedes feste $i = 1, ..., N$ eine disjunkte Zerlegung der Zustandsmenge X, wobei wir anmerken, dass $Z_k^i = \emptyset$ für alle $k \geq k_0$ für ein gewisses $k_0 > 0$ gilt.
Weiter gilt

$$X^i = Z_0^i$$

für alle $i = 1, ..., N$.
Für jedes $x = (x^1, ..., x^N) \in X$ ergibt sich ein Vektor $(\kappa^1(x), ..., \kappa^N(x))$, wenn wir

$$\kappa^i(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{I}_{Z_k^i}(x)$$

für $i = 1, ..., N$ definieren. $\kappa^i(x)$ gibt also den Index der (eindeutig bestimmten) Menge Z_k^i an, in welcher x liegt.
Wir definieren Stoppzeiten τ^i durch

$$\tau^i := \inf\{n \geq 0 : \kappa^i(X_n) = 0\} \tag{4.18}$$

für $i = 1, ..., N$. τ^i gibt an, zu welcher Zeit das Lagerniveau im Lager des i-ten Spielers erstmals unter das Niveau S^i fällt.
Es gilt

Lemma 4.2. *Angenommen, es gelten die Bedingungen* **L1** *und* **L2**.
Weiterhin sei $\pi = (\pi^1, ..., \pi^N) \in \mathbf{\Pi}$ ein beliebiges Strategientupel und $x \in X$ ein beliebiger Anfangszustand.
Spielt Spieler i die Strategie $\tilde{\pi}^i$ mit (4.17), so gilt die Ungleichung

$$\kappa^i(X_{n+1}) \leq \kappa^i(X_n) \tag{4.19}$$

$P_x^{(\tilde{\pi}^i, \pi^{-i})}$*-fast sicher. Außerdem ist*

$$P_x^{(\tilde{\pi}^i, \pi^{-i})}\big(\kappa^i(X_{n+1}) = k, \kappa^i(X_n) = k\big) \leq (1 - \theta^i) P_x^{(\tilde{\pi}^i, \pi^{-i})}\big(\kappa^i(X_n) = k\big) \tag{4.20}$$

für alle $n \geq 0$ und $k \geq 1$.

Beweis. Wir zeigen die Ungleichungen o.B.d.A. für $i = 1$.
Nehmen wir also an, Spieler 1 spielt $\tilde{\pi}^1 \in \mathbf{\Pi}^1$ mit (4.17), die Spieler 2 bis N spielen π^{-1} beliebig.
Weiterhin sei $x \in X$ der Anfangszustand des Spieles. Zur Verkürzung der Schreibweise schreiben wir P für das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_x^{(\tilde{\pi}^1, \pi^{-1})}$ und E für die zugehörige Erwartung.
Den Zufallsvektor $(X_0, Y_0, ..., X_{n-1}, Y_{n-1}, X_n)$ der Vorgeschichte bis zum Zeitpunkt n bezeichnen wir mit Z_n $(n \geq 1)$, weiterhin sei $Z_0 := X_0 = x$.
Die Randverteilung von P bezüglich $(X \times B)^n \times X$ bezeichnen wir mit P_n für $n \geq 0$. Damit ist P_n die Verteilung des Zufallsvektors Z_n.
Ist $X_n = (X_n^1, ..., X_n^N)$ die zufällige Folge der Zustände und $Y_n = (Y_n^1, ..., Y_n^N)$ die zufällige Folge der Aktionen der Spieler, so gilt nach Definition (4.17)

$$X_n^1 = Y_n^1 \tag{4.21}$$

P-fast sicher für alle $n \geq 0$. Ist außerdem $D_n = (D_n^1, ..., D_n^M)$ der zufällige Bedarfsvektor in Periode n, so ist wegen Annahme **L1.d**

$$Y_{n+1}^1 = X_{n+1}^1 = s^1(Y_n, D_n) \leq Y_n^1 = X_n^1 \tag{4.22}$$

P-fast sicher für alle $n \geq 0$. Es folgt

$$\kappa^i(X_{n+1}) \leq \kappa^i(X_n)$$

P-fast sicher für alle $n \geq 0$.
Um (4.20) zu zeigen, stellen wir folgende Überlegung an:
Sei $n \geq 0$ beliebig und

$$z_n = (x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1}, x_n)$$

ein feste Vorgeschichte mit $z_n \in (X \times B)^n \times Z_k^1$ für ein $k \geq 1$. Insbesondere bedeutet dies, dass

$$x_n^1 \in W_k^i = (S^1 + (k-1)\delta^1, S^1 + k\delta^1] \quad \cap \quad [m^1, M^1]$$

und demnach

$$x_n^1 - \delta^1 \leq S^1 + (k-1)\delta^1$$

ist. Wenden wir (4.9) und (4.15) für $k \geq 2$ bzw. (4.16) für $k = 1$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&p(Z_k^1 | x_n^1, y^2, ..., y^N) \\
&\quad = p((S^1 + (k-1)\delta^1, x_n^1] \times [m^2, M^2] \times ... \times [m^N, M^N] | x_n^1, y^2, ..., y^N) \\
&\Big(\leq p([x_n^1 - \delta^1, x_n^1] \times [m^2, M^2] \times ... \times [m^N, M^N] | x_n^1, y^2, ..., y^N) \Big) \\
&\quad \leq 1 - \theta^1
\end{aligned}$$

für alle $y^2 \in B^2, ..., y^N \in B^N$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n+1} \in Z_k^1, X_n \in Z_k^1\big) \\
&\quad = P\big(X_{n+1} \in Z_k^1, Z_n \in (X \times B)^n \times Z_k^1\big) \\
&\quad = \int\limits_{(X \times B)^n \times Z_k^1} \int\limits_{B^1} ... \int\limits_{B^N} p(Z_k^1 | y^1, ..., y^N) \pi_n^N(dy^N | z_n) ... \\
&\qquad\qquad\qquad ... \pi_n^2(dy^2 | z_n) \tilde{\pi}_n^1(dy^1 | z_n) P_n(dz_n) \\
&\quad = \int\limits_{(X \times B)^n \times Z_k^1} \int\limits_{B^2} ... \int\limits_{B^N} p(Z_k^1 | x_n^1, y^2, ..., y^N) \pi_n^N(dy^N | z_n) ... \\
&\qquad\qquad\qquad ... \pi_n^2(dy^2 | z_n) P_n(dz_n) \\
&\quad \leq (1 - \theta^1) \quad P_n\big((X \times B)^n \times Z_k^1\big) \\
&\quad = (1 - \theta^1) P\big(X_n \in Z_k^1\big).
\end{aligned}$$

Das Ereignis $X_n \in Z_k^1$ tritt ein gdw. $\kappa^1(X_n) = k$ gilt. Wir haben also

$$P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = k, \kappa^1(X_n) = k\big) \leq (1 - \theta^1) P\big(\kappa^1(X_n) = k\big)$$

für jedes $k \geq 1$. □

Das nächste Lemma gibt eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\kappa^i(X_n)$ an.

Lemma 4.3. *Angenommen, es gelten die Voraussetzungen von Lemma 4.2.*
Es gelte für ein $i = 1, ..., N$ $x \notin X^i$, d.h. $K_0^i := \kappa^i(x) = \kappa^i(X_0) \geq 1$. Dann gilt für jedes $n \geq 1$ die Abschätzung

$$P_x^{(\tilde{\pi}^i, \pi^{-i})}\big(\kappa^i(X_n) = K_0^i - l\big) \leq \binom{n + l - 1}{l} (1 - \theta^i)^{n-l} \tag{4.23}$$

für $l = 0, 1, ..., \min\{n, K_0^i\} - 1$.

Beweis. Wir zeigen die Abschätzung wieder o.B.d.A. für $i = 1$.
Wie bei Lemma 4.2 schreiben wir P für das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_x^{(\tilde{\pi}^1, \pi^{-1})}$ und E für die zugehörige Erwartung.
Sei nun $x \notin X^1$, also $K_0^1 \geq 1$. Wegen (4.19) liegen alle $\kappa^1(X_n)$ P-fast sicher in der Menge $\{0, 1, ..., K_0^1\}$.
Wir wollen (4.23) durch vollständige Induktion zeigen.
Für $n = 1$ ist $\min\{n, K_0^1\} - 1 = 0$ und

$$\begin{aligned}
&P\big(\kappa^1(X_1) = K_0^1\big) \\
&\quad = P\big(\kappa^1(X_1) = K_0^1, \kappa^1(X_0) = K_0^1\big) + P\big(\kappa^1(X_1) = K_0^1, \kappa^1(X_0) \neq K_0^1\big) \\
&\quad = P\big(\kappa^1(X_1) = K_0^1, \kappa^1(X_0) = K_0^1\big) \leq 1 - \theta^1
\end{aligned}$$

nach (4.20). Gilt (4.23) für ein $n \geq 1$, so ist

$$
\begin{aligned}
&P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l\big)\\
&\quad = \sum_{j=0}^{K_0^1} P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l, \kappa^1(X_n) = K_0^1 - j\big)\\
&\quad = \sum_{j=0}^{l} P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l, \kappa^1(X_n) = K_0^1 - j\big)\\
&\quad = P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l, \kappa^1(X_n) = K_0^1 - l\big)\\
&\qquad\qquad + \sum_{j=0}^{l-1} P\big(\kappa^1(X_n) = K_0^1 - j\big)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Uns interessieren nur Werte für l mit $0 \leq l \leq \min\{n+1, K_0^1\} - 1$. Damit nimmt der Laufindex in der Summe auf der rechten Seite von (4.24) nur Werte $j \leq l - 1 \leq \min\{n, K_0^1 - 1\} - 1$ an. Wir können also alle Summanden durch (4.23) abschätzen. Den Term vor der Summe schätzen wir mit (4.20) ab. Insgesamt ergibt sich also aus (4.24)

$$
\begin{aligned}
P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l\big) \leq{}& (1-\theta^1) P\big(\kappa^1(X_n) = K_0^1 - l\big)\\
&+ \sum_{j=0}^{l-1} \binom{n+j-1}{j} (1-\theta^1)^{n-j}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Um den ersten Term auf der rechten Seite abzuschätzen, unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $0 \leq l \leq \min\{n, K_0^1\} - 1$, so können wir die Induktionsvoraussetzung (4.23) benutzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l\big) &\leq (1-\theta^1) \binom{n+l-1}{l} (1-\theta^1)^{n-l}\\
&\qquad + \sum_{j=0}^{l-1} \binom{n+j-1}{j} (1-\theta^1)^{n-j}\\
&\leq (1-\theta^1)^{n+1-l} \sum_{j=0}^{l} \binom{n+j-1}{j}\\
&= (1-\theta^1)^{n+1-l} \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+l-1}{l} \right]\\
&= \binom{n+l}{l} (1-\theta^1)^{n+1-l}.
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich aus

$$
\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1}
$$

und wiederholter Anwendung der Beziehung

$$
\binom{m}{s} + \binom{m}{s+1} = \binom{m+1}{s+1}.
$$

Sei nun andererseits $\min\{n, K_0^1\} - 1 < l \leq \min\{n+1, K_0^1\} - 1$. Für $n \geq K_0^1$ wäre dies gleichbedeutend mit $K_0^1 - 1 < l \leq K_0^1 - 1$, also tritt dieser Fall nur für $n < K_0^1$ ein. Dann ist aber $n - 1 < l \leq n$, demnach $l = n$. Aus (4.25) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l\big) &\leq (1-\theta^1) + \sum_{j=0}^{l-1} \binom{n+j-1}{j} (1-\theta^1)^{n-j} \\
&\leq (1-\theta^1) + (1-\theta^1)^{n-l+1} \sum_{j=0}^{l-1} \binom{n+j-1}{j} \\
&= (1-\theta^1) + \binom{n+l-1}{l-1} (1-\theta^1)^{n+1-l} \\
&= (1-\theta^1) + \binom{2n-1}{n-1} (1-\theta^1) \\
&\leq \binom{2n}{n} (1-\theta^1) = \binom{n+l}{l} (1-\theta^1)^{n+1-l},
\end{aligned}$$

also haben wir gezeigt, dass

$$P\big(\kappa^1(X_{n+1}) = K_0^1 - l\big) \leq \binom{n+l}{l} (1-\theta^1)^{n+1-l}$$

für alle $l = 0, 1, ..., \min\{n+1, K_0^1\} - 1$ gilt.
Damit ist (4.23) für alle $n \geq 1$ gültig. □

Wir bemerken, dass die Abschätzung für kleine n sehr grob sein kann, da die rechte Seite von (4.23) für kleine θ^i größer als 1 werden kann.
Das folgende Lemma beweist nun die Endlichkeit des Erwartungswertes von τ^i.

Lemma 4.4. *Angenommen, es gelten die Vorausetzungen von Lemma 4.2.*
Dann gilt

$$E_x^{(\tilde{\pi}^i, \pi^{-i})} \tau^i < \infty \tag{4.26}$$

für jedes $i = 1, ..., N$.

Beweis. Wir zeigen erneut (4.26) o.B.d.A. für $i = 1$. Außerdem verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie in den Lemmata 4.2 und 4.3.
Ist $x \in X^1 = Z_0^1$, so ist $\tau^1 = 0$ P-fast sicher, damit gilt die Behauptung.
Sei nun $x \notin X^1$, oder gleichbedeutend $K_0^1 \geq 1$.
Nehmen wir an, dass $n > K_0^1$ ist, so erhalten wir aus (4.23) sofort

$$\begin{aligned}
P\big(\kappa^1(X_n) = K_0^1 - l\big) &\leq \binom{n+l-1}{l} (1-\theta^1)^{n-l} \\
&\leq n^l (1-\theta^1)^{n-l} \leq n^{K_0^1 - 1} (1-\theta^1)^{n-K_0^1+1}
\end{aligned}$$

für $l = 0, 1, ..., K_0^1 - 1$.
Wegen (4.19) ist $\tau^1 > n$ gdw. $\kappa^1(X_n) > 0$. Alle $\kappa^1(X_n)$ liegen P-fast sicher in der Menge $\{0, 1, ..., K_0^1\}$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
P\big(\tau^1 > n\big) &= P\big(\kappa^1(X_n) > 0\big) \\
&= \sum_{l=1}^{K_0^1} P\big(\kappa^1(X_n) = l\big) \leq K_0^1 n^{K_0^1 - 1} (1-\theta^1)^{n-K_0^1+1}
\end{aligned}$$

für alle $n > K_0^1$. Schließlich erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E\tau^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(\tau^1 = n) \\
&\leq \sum_{n=0}^{K_0^1} nP(\tau^1 = n) + \sum_{n=K_0^1+1}^{\infty} nP(\tau^1 > n) \\
&\leq \sum_{n=0}^{K_0^1} nP(\tau^1 = n) + \sum_{n=K_0^1+1}^{\infty} nK_0^1 n^{K_0^1-1}(1-\theta^1)^{n-K_0^1+1} \\
&\leq \sum_{n=0}^{K_0^1} nP(\tau^1 = n) + \frac{K_0^1}{(1-\theta^1)^{K_0^1-1}} \sum_{n=K_0^1+1}^{\infty} n^{K_0^1}(1-\theta^1)^n
\end{aligned}
$$

für $i = 2, ..., N$. Die Terme auf der rechten Seite sind alle endlich, damit gilt (4.26). □

Nun haben wir das Rüstzeug, um die Gültigkeit von **B4** zu beweisen.

Lemma 4.5. *Angenommen, es gelten die Bedingungen* **L1** *und* **L2**.
Dann erfüllt das Strategientupel $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}^1, ..., \tilde{\pi}^N) \in \mathbf{\Pi}$ *mit (4.17) die Annahme* **B4**.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jedes $i = 1, ..., N$

$$E_x^{(\pi^i, \tilde{\pi}^{-i})} T^i < \infty$$

für alle $\pi^i \in \mathbf{\Pi}^i$ und alle $x \in X$ gilt.
Sei o.B.d.A. $i = 1$. Nach Definition ist

$$
\begin{aligned}
T^1 &= \inf\{n \geq 0 : X_n \in \tilde{X}^1\} \\
&= \inf\{n \geq 0 : X_n \in X^2 \cap ... \cap X^N\} \\
&= \inf\{n \geq 0 : X_n \in Z_0^2 \cap ... \cap Z_0^N\} \\
&= \inf\{n \geq 0 : X_n^2 \in Z_0^2, ..., X_n^N \in Z_0^N\} \\
&= \inf\{n \geq 0 : \kappa^2(X_n) = 0, ..., \kappa^N(X_n) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Spielen nun die Spieler 2 bis N das Tupel $\tilde{\pi}^{-1} = (\tilde{\pi}^2, ..., \tilde{\pi}^N)$ und Spieler 1 spielt eine beliebige Strategie $\pi^1 \in \mathbf{\Pi}^1$, so gelten die Voraussetzungen der Lemmata 4.2, 4.3 und 4.4 für $i = 2, ..., N$. Wegen

$$\tau^i = \inf\{n \geq 0 : \kappa^i(X_n) = 0\}$$

und

$$\kappa^i(X_{n+1}) \leq \kappa^i(X_n)$$

$P_x^{(\pi^1, \tilde{\pi}^{-1})}$-fast sicher für $i = 2, ..., N$ ist

$$T^1 = \max\{\tau^2, ..., \tau^N\}$$

$P_x^{(\pi^1, \tilde{\pi}^{-1})}$-fast sicher. Da aber (4.26) für $i = 2, ..., N$ gilt, folgt daraus

$$E_x^{(\pi^1, \tilde{\pi}^{-1})} T^1 < \infty$$

und damit die Behauptung. □

Wir bemerken, dass die Gültigkeit von (4.26) für alle i eine stärkere Aussage als Annahme **B4** darstellt. **B4** fordert, dass unabhängig vom Anfangszustand und von der Strategie des Spielers i die anderen Spieler die Möglichkeit haben, durch Spielen von $\tilde{\pi}^{-i}$ ein Erreichen der Zustandsmenge $\tilde{X}^i$ in endlicher Zeit zu erzwingen. Dagegen sagt (4.26) aus, dass es für jeden einzelnen Spieler j unabhängig von der Strategie aller anderen Spieler möglich ist, durch Spielen von $\tilde{\pi}^j$ einen Eintritt in die Menge X^j in

endlicher Zeit zu erreichen.
Betrachten wir nun das Strategientupel $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ mit

$$\pi_n^{i*}(h_n) = \begin{cases} \delta_{S^i} & \text{falls } x_n^i \leq S^i \\ \delta_{x_n^i} & \text{falls } x_n^i > S^i \end{cases} \tag{4.27}$$

für alle $i = 1, ..., N$ und alle $h_n = (x_0, y_0, ..., x_n) \in H_n$. Die Lemmata 4.1 und 4.5 führen uns sofort zu folgendem Korollar unseres Theorems 3.2:

Korollar 4.2. *Unter den Annahmen* **L1** *und* **L2** *ist das Strategientupel* $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ *mit (4.27) ein Nash-Equilibrium bezüglich* X*.*
Es gilt

$$J^i(x, \pi^*) = G^i(S^1, ..., S^N)$$

für alle $x \in X$ *und alle* $i = 1, ..., N$*.*

Für den einzelnen Spieler bedeutet das Benutzen von π^*, dass er nichts produziert, falls sein Lagerniveau über einem gewissen Grundniveau liegt, andernfalls wird genau so viel produziert wie nötig ist, um das Grundniveau zu erreichen. Strategien dieser Art sind auch für viele Ein-Lager-Modelle mit ähnlichen Voraussetzungen wie **L1** optimal. Wir nennen sie (S, S)*-Strategien*.

4.3 Beispiel 1: Bilanzgleichung

Im letzten Abschnitt sind die Bedingungen **L1** und **L2** an das Lagerhaltungsmodell gestellt worden, um die Existenz eines Nash-Equilibriums in (S, S)-Strategien zeigen zu können. Wir wollen uns nun einem Beispiel zuwenden, für das **L1.d** und **L2** erfüllt sind.
Seien die Bilanzgleichungen für Spieler $i = 1, ..., N$ durch

$$s^i(y, d) = \max\{m^i, y^i - h^i(y, d)\} \tag{4.28}$$

für $y = (y^1, ..., y^N) \in B, d \in \mathcal{D}$ gegeben. h^i sei eine beliebige *nichtnegative* Funktion von $\mathbb{R}^N \times \mathcal{D}$ in die reellen Zahlen.
Dann ist für jedes i wegen $y^i \geq m^i$ auch

$$s^i(y, d) \leq y^i \tag{4.29}$$

für alle $y = (y^1, ..., y^N) \in B$ und alle $d \in \mathcal{D}$. Es gilt also Annahme **L1.d**.
In der Literatur zu Lagerhaltungsproblemen mit einem Entscheider werden häufig die Fälle

$$s^i(y, d) = (y^i - d^i)^+ \tag{4.30}$$

mit $z^+ := \max\{0, z\}$ und

$$s^i(y, d) = y^i - d^i \tag{4.31}$$

behandelt. Dabei sei $N = M$, d.h. es gibt genauso viele Bedarfsklassen wie Spieler, und wir ordnen die Bedarfskomponente d^i dem Spieler i zu.
Bei (4.30) spricht man vom *lost sales* -Fall. Ist der anfallende Bedarf höher als das verfügbare Lagerniveau, so geht der überschüssige Bedarf verloren, und das Lagerniveau zu Beginn der folgenden Periode ist gleich 0.
Gilt (4.31), so liegt der *backlog* -Fall vor. Eine mögliche Interpretation eines solchen Modells ist die Annahme, dass ein in einer Periode nicht befriedigter Bedarf zu einer Vormerkung führt. Die vorgemerkte Menge wird dann in einer späteren Periode geliefert.
Mit $m^i = 0$ und $h^i(y^{-i}, d) = d^i$ ist der Fall (4.30) offenbar durch (4.28) abgedeckt.
Nicht vorgesehen ist in unserem Modell ein vollständiges *Backlogging* im Sinne, dass die vorgemerkte Menge beliebig groß werden kann. Grund dafür ist die Notwendigkeit der Kompaktifizierung der Mengen der zulässigen Aktionen. Für viele praktische Anwendungen sollte die Beschränkung des Backlogs aber keine sehr restriktive Annahme sein, da wir die Grenzen m^i beliebig klein wählen können.
Möglich wäre beispielsweise auch der Fall, dass eine Befriedigung des vorgemerkten Bedarfes in der direkt nachfolgenden Periode gefordert wird. Damit würde an die Stelle von (4.3)

$$B^i := [0, M^i] \tag{4.32}$$

treten. Fordern wir außerdem, dass die Funktionen h^i beschränkt sind, so können wir $m^i < 0$ so wählen, dass (4.28) gilt. Alle Aussagen des Abschnittes 4.2 gelten auch unter (4.32) anstelle von (4.3). Wenden wir uns nun Annahme **L2** zu.
Sei $\delta^i > 0$ und $y \in B$ mit $y^i > S^i + \delta^i \geq m^i + \delta^i$. Weiterhin sei ξ ein M-dimensionaler Zufallsvektor mit der Verteilung $\Phi(y, .)$. Unter (4.28) erhalten wir

$$\begin{aligned} &P\big(s^i(y,\xi) < y^i - \delta^i\big) \\ &\quad = P\big(\{s^i(y,\xi) < y^i - \delta^i\} \cap \{m^i \geq y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\qquad + P\big(\{s^i(y,\xi) < y^i - \delta^i\} \cap \{m^i < y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\quad = P\big(\{m^i < y^i - \delta^i\} \cap \{m^i \geq y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\qquad + P\big(\{y^i - h^i(y,\xi) < y^i - \delta^i\} \cap \{m^i < y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\quad = P\big(h^i(y,\xi) \geq y^i - m^i > \delta^i\big) + P\big(\delta^i < h^i(y,\xi) < y^i - m^i\big) \\ &\quad = P\big(h^i(y,\xi) > \delta^i\big). \end{aligned}$$

Setzen wir also für s^i die Struktur (4.28) voraus, so ist die Existenz eines $\delta^i > 0$ und eines $\theta^i > 0$ mit

$$P\big(h^i(y,\xi) > \delta^i\big) \geq \theta^i \tag{4.33}$$

für alle $y \in B$ mit $y^i > S^i + \delta^i$ hinreichend für die Gültigkeit von (4.13). Existieren sogar $\delta^i > 0$ und $\theta^i > 0$ mit (4.33) für alle $y \in B$ mit $y^i > S^i$, so folgt auch

$$\begin{aligned} &P\big(s^i(y,\xi) \leq S^i\big) \\ &\quad = P\big(\{s^i(y,\xi) \leq S^i\} \cap \{m^i \geq y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\qquad + P\big(\{s^i(y,\xi) \leq S^i\} \cap \{m^i < y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\quad = P\big(\{m^i \leq S^i\} \cap \{m^i \geq y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\qquad + P\big(\{y^i - h^i(y,\xi) \leq S^i\} \cap \{m^i < y^i - h^i(y,\xi)\}\big) \\ &\quad = P\big(h^i(y,\xi) \geq y^i - m^i\big) + P\big(y^i - S^i \leq h^i(y,\xi) < y^i - m^i\big) \\ &\quad = P\big(h^i(y,\xi) \geq y^i - S^i\big) \\ &\quad \geq P\big(h^i(y,\xi) \geq \delta^i\big) \geq P\big(h^i(y,\xi) > \delta^i\big) \geq \theta^i \end{aligned}$$

für alle $y \in B$ mit $S^i < y^i \leq S^i + \delta^i$.
Fassen wir dieses Beispiel nochmals zusammen:
Lässt sich die Funktion s^i für jedes i als

$$s^i(y,d) = \max\{m^i, y^i - h^i(y,d)\}$$

schreiben, und existieren $\delta^i > 0$ und $\theta^i > 0$ mit

$$P\big(h^i(y,\xi) > \delta^i\big) \geq \theta^i$$

für alle $y \in B$ mit $y^i > S^i$, wobei ξ die Verteilung $\Phi(y, .)$ (= Verteilung des Bedarfes bei Wahl der Aktion y) besitzt, so gelten die Annahmen **L1.d** und **L2** aus Abschnitt 4.2.

4.4 Beispiel 2: Austauschbare Produkte

Parlar [68] untersucht eine Ein-Stufen-Version des folgenden Problems:
Es gibt zwei Spieler ($N = 2$), die jeweils ein Produkt in einem Lager wie im Abschnitt 4.1 verwalten. An jedem der Produkte entsteht ein Bedarf ($M = 2$). Ist nun einer der Spieler in einer Periode nicht in der Lage, den Bedarf an seinem Produkt zu befriedigen, so kann der andere Spieler einspringen. Er kann einen gewissen Anteil des verbliebenen, noch nicht befriedigten Bedarfes liefern, falls er nach der Deckung des an seinem eigenen Produkt entstehenden Bedarfes noch Einheiten übrig behält.
Wir gehen konsequenterweise vom *lost sales* -Fall aus, also sei $m^1 = m^2 = 0$.
Um die Stetigkeit und Konkavität der Funktionen G^1 und G^2 zu sichern, werden an die Ertrags- und Kostenstruktur Bedingungen gestellt, die an die lineare Restbestandsbewertung aus der Lagerhaltungstheorie mit einem Entscheider anschließen.
Wir führen dazu nichtnegative reelle Konstanten mit folgenden Bedeutungen ein ($i = 1, 2$):

c^i	Produktionskosten/Einheit für Spieler i,
e^i	Ertrag/Einheit für Spieler i,
h^i	Lagerkosten/Einheit für Spieler i,
q^i	Fehlmengenkosten/Einheit für Spieler i,
b^i	Anteil des Bedarfes von Spieler i, der auf den anderen Spieler übergeht, falls Spieler i nicht mehr liefern kann, $0 \leq b^i \leq 1$.

In der Notation aus Annahme **L1.a** sei also $c^i(a) = c^i a^i$ (gleiche Bezeichnung für Funktion und Konstante).
Wir fordern hier $e^i > c^i$ für $i = 1, 2$, eine Bedingung, die in allen praktisch relevanten Fällen als erfüllt angesehen werden kann.
Die Bedarfsverteilung sei von den Aktionen der Spieler unabhängig. Wir gehen also davon aus, dass der Bedarf einer festen Verteilung $\Phi \in P(\mathcal{D})$ genügt. Für $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ mit der Verteilung Φ seien die Bedarfskomponenten ξ^1 und ξ^2 unabhängig. Der für das Produkt des einen Spielers entstehende Bedarf sei also unabhängig vom Bedarf für das Produkt des anderen Spielers.
Für beide Bedarfskomponenten existiere eine stetige Dichte (bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$). Die Dichten bezeichnen wir mit ϕ^1 bzw. ϕ^2. Es sei $\mathcal{D} = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Wir fordern, dass für $i = 1, 2$

$$\int_0^\infty t\phi^i(t)dt < \infty \tag{4.34}$$

gilt, der Erwartungswert der Bedarfskomponenten sei also endlich, und es sei

$$\phi^i(t) > 0 \tag{4.35}$$

für alle $t \in (0, M^i)$. Bezeichnen wir die Verteilungsfunktionen von ξ^1 und ξ^2 mit

$$\Phi^i(z) := \int_0^z \phi^i(t)dt$$

für $i = 1, 2$, so folgt aus (4.35)

$$\Phi^i(z) > 0 \tag{4.36}$$

für alle $z > 0$. Gleichbedeutend damit ist, dass es keinen positiven Mindestbedarf gibt, der nicht unterschritten wird. Fälle, für die (4.35) nicht gilt, können wir durch eine lineare Transformation der entsprechenden Bedarfskomponente auf ein Problem mit (4.35) zurückführen.
Das Problem ist bezüglich der Spieler symmetrisch. Alle Betrachtungen für Spieler 1 gelten deshalb analog auch für Spieler 2.
Schauen wir uns den Gewinn in einer Stufe an, den Spieler 1 erzielen kann:
Seien $x = (x^1, x^2)$ der Zustand zu Beginn der Periode, $y = (y^1, y^2)$ der Aktionsvektor und $d = (d^1, d^2)$ der Bedarfsvektor in der betrachteten Periode.
Die Gewinnfunktion für Spieler 1 laßt sich nach (4.7) darstellen als

$$r^1(x, y) = L^1(y) - c^1 y^1 + c^1 x^1,$$

wobei

$$L^1(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty g^1(y, (t^1, t^2))\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1 dt^2$$

ist.
In der Funktion g^1 sind alle Erträge und Kosten, die nichts mit der Produktion zu tun haben, zusammengefasst.
Bezogen auf die Gewinnfunktion und die Bilanzgleichung für Spieler 1 müssen wir je nach Relation zwischen y^i und d^i vier Fälle unterscheiden:

1. $y^1 \geq d^1, y^2 \geq d^2$
   Beide Spieler können ihren jeweiligen Bedarf befriedigen. Der Ertrag für Spieler 1 ist

   $$g^1(y, d) = e^1 d^1 - h^1(y^1 - d^1)$$

und die Bilanzgleichung ergibt sich durch

$$s^1(y,d) = y^1 - d^1.$$

2. $y^1 < d^1, y^2 \geq d^2$
Spieler 1 kann den Bedarf an seinem eigenen Produkt nicht vollständig decken. Es folgt

$$g^1(y,d) = e^1y^1 - q^1(d^1 - y^1)$$

und

$$s^1(y,d) = 0.$$

3. $y^1 < d^1, y^2 < d^2$
Für Spieler 1 hat dieser Fall die gleichen Auswirkungen wie Fall 2.

4. $y^1 \geq d^1, y^2 < d^2$
Dieser Fall ist aus der Sicht von Spieler 1 der eigentlich interessante, weil hier ein Austausch der Produkte stattfindet, bei dem Spieler 1 zusätzlich zu seinem eigenen auch noch einen Teil des Bedarfes von Spieler 2 decken kann.
Spieler 1 hat nach Befriedigung des Bedarfes an seinem Produkt noch Einheiten übrig, während der zweite Spieler keine ausreichende Menge seines Produktes zur Verfügung hat.
Wir müssen hier mehrere Fälle unterscheiden:
Sei zunächst $y^2 + y^1/b^2 < d^2$ oder äquivalent $y^1 < b^2(d^2 - y^2)$. In diesem Fall kann Spieler 1 nur einen Teil des verbleibenden Bedarfes von Spieler 2 decken. Wir erhalten

$$g^1(y,d) = e^1y^1$$

und

$$s^1(y,d) = 0,$$

da Spieler 1 unabhängig von der Höhe von d^1 immer seine gesamte verfügbare Menge verbraucht.
Gelte andererseits $y^2 + y^1/b^2 \geq d^2 > y^2$ oder $y^1 \geq b^2(d^2 - y^2)$. Nun kann abhängig von d^1 entweder $y^1 - d^1 < b^2(d^2 - y^2)$ oder $y^1 - d^1 \geq b^2(d^2 - y^2)$ gelten. Der erste Fall tritt ein, falls $y^1 - b^2(d^2 - y^2) < d^1 \leq y^1$, der zweite bei $0 \leq d^1 \leq y^1 - b^2(d^2 - y^2)$.
Im ersten Fall kann Spieler 1 wieder nur einen Teil des verbleibenden Bedarfes von Spieler 2 decken. Es ergibt sich erneut

$$g^1(y,d) = e^1y^1$$

und

$$s^1(y,d) = 0.$$

Im zweiten Fall hat Spieler 1 eine ausreichende Menge zur Verfügung, um seinen eigenen und den gesamten verbleibenden Bedarf von Spieler 2 abzudecken. Es gilt

$$g^1(y,d) = e^1d^1 + e^1b^2(d^2 - y^2) - h^1(y^1 - d^1 - b^2(d^2 - y^2))$$

und

$$s^1(y,d) = y^1 - d^1 - b^2(d^2 - y^2).$$

Fassen wir alle Fälle zusammen und integrieren über die Bedarfsverteilung, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
L^1(y) = &\int_0^{y^2}\int_0^{y^1} [e^1t^1 - h^1(y^1 - t^1)]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
&+ \int_{y^1}^{\infty} [e^1y^1 - q^1(t^1 - y^1)]\phi^1(t^1)dt^1 \\
&+ \int_{\alpha}^{\infty}\int_0^{y^1} e^1y^1\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
&+ \int_{y^2}^{\alpha}\int_{y^1-b^2(t^2-y^2)}^{y^1} e^1y^1\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
&+ \int_{y^2}^{\alpha}\int_0^{y^1-b^2(t^2-y^2)} [e^1t^1 + e^1b^2(t^2 - y^2)]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
&- \int_{y^2}^{\alpha}\int_0^{y^1-b^2(t^2-y^2)} [h^1(y^1 - t^1 - b^2(t^2 - y^2))]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2
\end{aligned} \tag{4.37}$$

mit $\alpha := y^2 + y^1/b^2$. Nach (4.8) ist

$$G^1(y) = L^i(y) - c^1y^1 + c^1\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^1(y,(t^1,t^2))\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2. \tag{4.38}$$

Das Integral auf der rechten Seite ergibt sich durch

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^1(y,(t^1,t^2))\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
&\qquad = \int_0^{y^2}\int_0^{y^1} [y^1 - t^1]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
&\qquad + \int_{y^2}^{\alpha}\int_0^{y^1-b^2(t^2-y^2)} [y^1 - t^1 - b^2(t^2 - y^2)]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Wir bemerken hier außerdem, dass sich s^1 in der Form (4.28) aus Beispiel 1 schreiben lässt. Dabei ist

$$h^1(y,d) = \begin{cases} d^1 & \text{falls } y^1 \geq d^1, y^2 \geq d^2 \\ d^1 + b^2(d^2 - y^2) & \text{falls } d^1 \leq y^1 - b^2(d^2 - y^2) \\ & \qquad\qquad \text{und } y^2 < d^2 \leq y^2 + y^1/b^2 \\ d^1 + y^1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei im letzten Fall $h^1(y,d) \geq y^1$ beliebig gewählt werden kann. Für diese Gestalt von h^1 ist für eine beliebige Konstante $\delta^1 > 0$

$$P\big(h^1(y,\xi) > \delta^1\big) \geq P\big(\xi^1 > \delta^1\big) = 1 - \Phi^1(\delta^1) =: \theta^1(\delta^1)$$

für alle $y \in B$. Gibt es nun ein $\delta^1 > 0$ mit $\Phi^1(\delta^1) < 1$, so ist (4.33) erfüllt. Wegen (4.35) existiert ein solches δ^1. (4.33) gilt für alle $y \in B$, nach Beispiel 1 gelten damit die Annahmen **L1.d** und **L2** aus Abschnitt 4.2.

Setzen wir (4.37) und (4.39) in (4.38) ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G^1(y) = & \int\limits_0^{y^2}\int\limits_0^{y^1}[e^1t^1 + (c^1 - h^1)(y^1 - t^1)]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
& + \int\limits_{y^1}^{\infty}[e^1y^1 - q^1(t^1 - y^1)]\phi^1(t^1)dt^1 \\
& + \int\limits_{\alpha}^{\infty}\int\limits_0^{y^1} e^1y^1\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
& + \int\limits_{y^2}^{\alpha}\int\limits_{y^1-b^2(t^2-y^2)}^{y^1} e^1y^1\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
& + \int\limits_{y^2}^{\alpha}\int\limits_0^{y^1-b^2(t^2-y^2)} [e^1t^1 + e^1b^2(t^2 - y^2)]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
& + \int\limits_{y^2}^{\alpha}\int\limits_0^{y^1-b^2(t^2-y^2)} [(c^1 - h^1)(y^1 - t^1 - b^2(t^2 - y^2))]\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 \\
& - c^1y^1.
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Wir hatten die Stetigkeit der Dichten und (4.34) vorausgesetzt. Daraus folgt die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit von G^1 (siehe z.B. [54]).
Halten wir nun y^2 fest, so können wir mit der Leibniz-Regel die partielle Ableitung von G^1 nach y^1 bestimmen. Dazu bezeichnen wir die einzelnen Integrale auf der rechten Seite von (4.40) mit A^1 bis A^6 und leiten sie nacheinander partiell nach y^1 ab:

$$\frac{\delta A^1}{\delta y^1} = (c^1 - h^1)\int\limits_0^{y^2}\int\limits_0^{y^1}\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 + e^1y^1\phi^1(y^1)\int\limits_0^{y^2}\phi^2(t^2)dt^2$$

$$\frac{\delta A^2}{\delta y^1} = (e^1 + q^1)\int\limits_{y^1}^{\infty}\phi^1(t^1)dt^1 - e^1y^1\phi^1(y^1)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta A^3}{\delta y^1} = e^1 & \int\limits_{\alpha}^{\infty}\int\limits_0^{y^1}\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 + e^1y^1\phi^1(y^1)\int\limits_{\alpha}^{\infty}\phi^2(t^2)dt^2 \\
& - \frac{e^1y^1}{b^2}\phi^2(\alpha)\int\limits_0^{y^1}\phi^1(t^1)dt^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta A^4}{\delta y^1} = e^1 & \int\limits_{y^2}^{\alpha}\int\limits_{y^1-b^2(t^2-y^2)}^{y^1}\phi^1(t^1)\phi^2(t^2)dt^1dt^2 + e^1y^1\phi^1(y^1)\int\limits_{y^2}^{\alpha}\phi^2(t^2)dt^2 \\
& - e^1y^1\phi^1(y^1 - b^2(t^2 - y^2))\int\limits_{y^2}^{\alpha}\phi^2(t^2)dt^2 \\
& + \frac{e^1y^1}{b^2}\phi^2(\alpha)\int\limits_0^{y^1}\phi^1(t^1)dt^1
\end{aligned}
$$

$$\frac{\delta A^5}{\delta y^1} = e^1 y^1 \phi^1(y^1 - b^2(t^2 - y^2)) \int\limits_{y^2}^{\alpha} \phi^2(t^2) dt^2$$

$$\frac{\delta A^6}{\delta y^1} = (c^1 - h^1) \int\limits_{y^2}^{\alpha} \int\limits_{0}^{y^1 - b^2(t^2 - y^2)} \phi^1(t^1)\phi^2(t^2) dt^1 dt^2$$

Insgesamt ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\frac{\delta G^1(y^1, y^2)}{\delta y^1} &= (c^1 - h^1) \int\limits_{0}^{y^2} \int\limits_{0}^{y^1} \phi^1(t^1)\phi^2(t^2) dt^1 dt^2 \\
&+ (e^1 + q^1) \int\limits_{y^1}^{\infty} \phi^1(t^1) dt^1 \\
&+ e^1 \int\limits_{\alpha}^{\infty} \int\limits_{0}^{y^1} \phi^1(t^1)\phi^2(t^2) dt^1 dt^2 \\
&+ e^1 \int\limits_{y^2}^{\alpha} \int\limits_{y^1 - b^2(t^2 - y^2)}^{y^1} \phi^1(t^1)\phi^2(t^2) dt^1 dt^2 \\
&+ (c^1 - h^1) \int\limits_{y^2}^{\alpha} \int\limits_{0}^{y^1 - b^2(t^2 - y^2)} \phi^1(t^1)\phi^2(t^2) dt^1 dt^2 \\
&- c^1.
\end{aligned}$$

Umformungen führen zu

$$\begin{aligned}
\frac{\delta G^1(y^1, y^2)}{\delta y^1} &= e^1 - c^1 + q^1 - q^1 \Phi^1(y^1) - (e^1 - c^1 + h^1)\Phi^1(y^1)\Phi^2(y^2) \\
&- (e^1 - c^1 + h^1) \int\limits_{y^2}^{\alpha} \Phi^1(y^1 - b^2(t^2 - y^2))\phi^2(t^2) dt^2. \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

Mit denselben Argumenten wie oben folgern wir die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\frac{\delta G^1(y^1,y^2)}{\delta y^1}$. Leiten wir nun nochmals nach y^1 ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 G^1(y^1, y^2)}{\delta (y^1)^2} &= -q^1 \phi^1(y^1) - (e^1 - c^1 + h^1)\phi^1(y^1)\Phi^2(y^2) \\
&- (e^1 - c^1 + h^1) \int\limits_{y^2}^{\alpha} \phi^1(y^1 - b^2(t^2 - y^2))\phi^2(t^2) dt^2. \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Wegen $e^1 > c^1$ und (4.35) gilt für $y^1 \in (0, M^1), y^2 \in [0, M^2]$

$$\frac{\delta^2 G^1(y^1, y^2)}{\delta (y^1)^2} < 0,$$

demnach ist die Funktion $G^1(., y^2)$ strikt konkav für $y^2 \in [0, M^2]$.
Wir können zusammenfassend feststellen, dass die Annahmen **L1** und **L2** erfüllt sind, damit ist die Strategie $\pi^* = (\pi^{1*}, \pi^{2*})$ mit (4.27) ein Nash-Equilibrium.
In unserem Beispiel lässt sich sogar noch eine stärkere Aussage treffen. Nach Lemma 4.1 gibt es wegen der Gültigkeit von **L1** ein $S = (S^1, S^2) \in B^1 \times B^2$ mit

$$G^1(S^1, S^2) \geq G^1(y^1, S^2)$$

für alle $y^1 \in B^1$ und

$$G^2(S^1, S^2) \geq G^2(S^1, y^2)$$

für alle $y^2 \in B^2$. Nun lässt sich sogar zeigen, dass dieses S eindeutig bestimmt ist.
Da $G^1(., y^2)$ für jedes feste y^2 strikt konkav ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\tilde{y}^1$, für das $G^1(\tilde{y}^1, y^2) \geq G^1(y^1, y^2)$ für alle $y^1 \in [0, M^1]$ gilt. Es macht also Sinn, eine Funktion $v : [0, M^2] \to [0, M^1]$ durch

$$v(y^2) := \tilde{y}^1 \tag{4.43}$$

zu definieren. $v(y^2)$ ist die *beste Antwort* für Spieler 1 auf die Aktion y^2 von Spieler 2.
Wir bemerken zunächst, dass $v(y^2) > 0$ für alle y^2 gilt, denn für $y^1 \to 0$ konvergiert die erste Ableitung (4.41) gegen $e^1 - c^1 + q^1 > 0$. Damit ist $G^1(., y^2)$ für jedes $y^2 \in [0, M^2]$ in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend, woraus wegen der Stetigkeit zwingend $v(y^2) > 0$ folgt.
Das folgende Lemma gibt weitere wichtige Eigenschaften der Funktion v an:

Lemma 4.6. *Die Funktion v mit (4.43) hat folgende Eigenschaften:*

(a) v ist stetig und monoton fallend.

(b) Auf der Menge $C := \{u \in [0, M^2] | v(M^2) < v(u) < v(0)\}$ ist $-1 < v'(u) < 0$.

Beweis. Zeigen wir zunächst die Stetigkeit.
Angenommen, v wäre in einem Punkt $u_0 \in [0, M^2]$ nicht stetig. Sei $t_0 := v(u_0)$. Dann gibt es eine Folge $u_j, j = 1, 2, ...$ in $[0, M^2]$, so dass u_0 Grenzwert der Folge u_j ist, aber t_0 nicht Grenzwert der Folge $v(u_j)$ für $j \to \infty$. Die Folge der Funktionswerte $v(u_j)$ liegt in der kompakten Menge $[0, M^1]$, also gibt es eine Teilfolge, sagen wir u_{j^k}, für die $v(u_{j^k})$ gegen einen Punkt $\tilde{t}_0 \neq t_0$ konvergiert. Es gilt aber für jedes k

$$G^1(v(u_{j^k}), u_{j^k}) \geq G^1(t_0, u_{j^k})$$

und nach Übergang zum Grenzwert für $j \to \infty$

$$G^1(\tilde{t}_0, u_0) \geq G^1(t_0, u_0) = G^1(v(u_0), u_0).$$

Die Ungleichheit $\tilde{t}_0 \neq t_0 = v(u_0)$ ist damit ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von $v(u_0)$.
Also ist v in jedem Punkt stetig.
Sei $C^1 := \{u \in (0, M^2) | 0 < v(u) < M^1\}$. Ist $u \in C^1$, so liegt also das eindeutig bestimmte Maximum von $G^1(t, u)$ über t im Innern von $[0, M^1]$. Folglich ist die erste Ableitung von G^1 nach t an der Stelle $(v(u), u)$ gleich Null. Mit

$$F(t, u) := \frac{\delta G^1(t, u)}{\delta t}$$

ist also $F(v(u), u) = 0$ für alle $u \in C^1$. Für alle $t \neq v(u)$ gilt gleichzeitig $F(t, u) \neq 0$ wegen der strikten Konkavität. Durch $F(t, u) = 0$ wird also auf C^1 die Funktion v implizit definiert.
Die Menge C^1 ist wegen der Stetigkeit von v offen. Ist $(t, u) \in (0, M^1) \times C^1$, so ist nach dem Satz über implizite Funktionen (siehe z.B. [54]) v in u differenzierbar und es gilt

$$\frac{dv(u)}{du} = -\frac{\delta F(t, u)}{\delta u} / \frac{\delta F(t, u)}{\delta t}.$$

mit $t = v(u)$.
Wir haben wegen (4.41)

$$F(t, u) = e^1 - c^1 + q^1 - q^1 \Phi^1(t) - (e^1 - c^1 + h^1)\Phi^1(t)\Phi^2(u)$$
$$- (e^1 - c^1 + h^1) \int\limits_u^\alpha \Phi^1(t - b^2(z - u))\phi^2(z) dz$$

mit $\alpha := u + t/b^2 > u$. Weiter folgt unter Ausnutzung von (4.35)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F(t,u)}{\delta u} &= -(e^1 - c^1 + h^1)\Phi^1(t)\phi^2(u) \\
&\quad - (e^1 - c^1 + h^1)b^2 \int\limits_u^\alpha \phi^1(t - b^2(z-u))\phi^2(z)dz \\
&\quad + (e^1 - c^1 + h^1)\Phi^1(t)\phi^2(u) \\
&= -(e^1 - c^1 + h^1)b^2 \int\limits_u^\alpha \phi^1(t - b^2(z-u))\phi^2(z)dz < 0
\end{aligned}$$

und andererseits wegen (4.42)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F(t,u)}{\delta t} &= -q^1\phi^1(t) - (e^1 - c^1 + h^1)\phi^1(t)\Phi^2(u) \\
&\quad - (e^1 - c^1 + h^1) \int\limits_u^\alpha \phi^1(t - b^2(z-u))\phi^2(z)dz < 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten $dv(u)/du < 0$ für alle $u \in C^1$, also ist v auf der offenen Menge C^1 streng monoton fallend.
Definieren wir $C^2 := \{u \in (0, M^2) | v(u) = M^1\}$, so bilden C^1 und C^2 eine disjunkte Zerlegung von $(0, M^2)$, da wir $v(u) = 0$ ausschließen konnten. Auf C^1 ist v streng monoton fallend, auf C^2 konstant. Insbesondere folgt daraus, dass v auf $[0, M^2]$ monoton fallend ist.
Ist $s \in C = \{u \in [0, M^2] | 0 < v(M^2) < v(u) < v(0) \leq M^1\}$, so ist $s \in C^1$. Ist andererseits $s \in C^1$, so ist $v(M^2) < v(s) < v(0)$, da $0 < s < M^2$ gilt und v stetig und in einer Umgebung von s streng monoton fallend ist. Also ist $s \in C$. Es gilt $C = C^1$.
Mit der Bezeichnung

$$A(t,u) := (e^1 - c^1 + h^1) \int\limits_u^\alpha \phi^1(t - b^2(z-u))\phi^2(z)dz$$

folgt aus den Ausführungen oben sofort

$$\begin{aligned}
-\frac{dv(u)}{du} &= \frac{\delta F(t,u)}{\delta u} \Big/ \frac{\delta F(t,u)}{\delta t} \\
&= \frac{b^2 A(t,u)}{q^1\phi^1(t) + (e^1 - c^1 + h^1)\phi^1(t)\Phi^2(u) + A(t,u)} \\
&< \frac{b^2 A(t,u)}{A(t,u)} = b^2 \leq 1
\end{aligned}$$

für $t = v(u)$ und $u \in C$. Damit haben wir $-1 < dv(u)/du < 0$ für alle $u \in C$. □

Man überlegt sich leicht, dass es für den Verlauf von v drei Möglichkeiten gibt:

(i) Es ist $C = (0, M^2)$, dann ist v sogar streng monoton fallend auf $[0, M^2]$.

(ii) Es gibt ein $u_0 \in (0, M^2)$, so dass v auf $[0, u_0]$ konstant gleich M^1 ist und auf $(u_0, M^2]$ streng monoton fallend. Dann ist $C = (u_0, M^2)$.

(iii) v ist auf $[0, M^2]$ konstant gleich M^1.

Es folgt

Lemma 4.7. *Für $0 \leq u_1 < u_2 \leq M^2$ gilt*

$$-1 < \frac{v(u_2) - v(u_1)}{u_2 - u_1} \leq 0. \tag{4.44}$$

Beweis. Seien $0 \leq u_1 < u_2 \leq M^2$ beliebig gewählt. Es ist $v(u_1) \geq v(u_2)$, und damit

$$\frac{v(u_2) - v(u_1)}{u_2 - u_1} \leq 0.$$

Gilt (iii), so ist

$$\frac{v(u_2) - v(u_1)}{u_2 - u_1} = 0.$$

Gilt (i), so ist v auf dem Intervall $[u_1, u_2]$ stetig und auf $(u_1, u_2) \subset C$ differenzierbar, also gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung einen Punkt $\tilde{u} \in (u_1, u_2)$ mit

$$\frac{v(u_2) - v(u_1)}{u_2 - u_1} = v'(\tilde{u}).$$

Nach Lemma 4.6(b) ist $-1 < v'(\tilde{u}) < 0$, damit gilt die Behauptung.
Gilt schließlich (ii), so können wir die Fälle $u_1 < u_2 \leq u_0$ und $u_0 < u_1 < u_2$ wie oben behandeln. Ist $u_1 \leq u_0 < u_2$, so ist $(u_0, u_2) \subset C$, und damit

$$\frac{v(u_2) - v(u_1)}{u_2 - u_1} = \frac{v(u_2) - v(u_0)}{u_2 - u_1} \geq \frac{v(u_2) - v(u_0)}{u_2 - u_0} = v'(\tilde{u})$$

für ein $\tilde{u} \in (u_0, u_2)$. Mit Lemma 4.6(b) folgt (4.44). □

Vertauschen wir die Rollen der Spieler, so erhalten wir eine eindeutig definierte Funktion $w : [0, M^1] \to (0, M^2]$ mit $G^2(y^1, w(y^1)) \geq G^2(y^1, y^2)$ für alle $y^2 \in [0, M^2]$. Diese Funktion w ist stetig, monoton fallend und nimmt Werte in einem Intervall $[w(M^1), w(0)] \subset (0, M^2]$ an. Weiterhin gilt für $0 \leq t_1 < t_2 \leq M^1$

$$-1 < \frac{w(t_2) - w(t_1)}{t_2 - t_1} \leq 0. \tag{4.45}$$

Nun erhalten wir

Satz 4.1. *Es gibt genau ein* $S = (S^1, S^2) \in [0, M^1] \times [0, M^2]$ *mit*

$$G^1(S^1, S^2) \geq G^1(y^1, S^2) \tag{4.46}$$

für alle $y^1 \in [0, M^1]$ *und*

$$G^2(S^1, S^2) \geq G^2(S^1, y^2) \tag{4.47}$$

für alle $y^2 \in [0, M^2]$.

Beweis. Die Existenz von S folgt aus der Gültigkeit von **L1** nach Lemma 4.1.
Betrachten wir die Kurven

$$E_1 := \{(y^1, y^2) \in [0, M^1] \times [0, M^2] | y^1 = v(y^2)\}$$

und

$$E_2 := \{(y^1, y^2) \in [0, M^1] \times [0, M^2] | y^2 = w(y^1)\}$$

in der (y^1, y^2)-Ebene.
Aus (4.46) bzw. (4.47) folgt $S^1 = v(S^2)$ bzw. $S^2 = w(S^1)$ und damit $S \in E_1 \cap E_2$. Ist andererseits $S \in E_1 \cap E_2$, so gelten (4.46) und (4.47).
Die Menge der Punkte S mit (4.46) und (4.47) ist also identisch mit der Menge der Schnittpunkte von E_1 und E_2.
Die Existenz eines solchen Schnittpunktes folgt im übrigen aus der Stetigkeit der Funktionen v und w.
Nehmen wir nun an, es gibt zwei Schnittpunkte $(t_1, u_1) \neq (t_2, u_2)$ von E_1 und E_2. Wäre $u_1 = u_2$, so wäre $t_1 = v(u_1) = v(u_2) = t_2$. Also nehmen wir o.B.d.A. an, dass $w(t_1) = u_1 < u_2 = w(t_2)$ gilt.
Es folgt nach Lemma 4.6(a) $t_1 = v(u_1) \geq v(u_2) = t_2$. Wäre andererseits $t_1 = t_2$, so würde $u_1 =$

$w(t_1) = w(t_2) = u_2$ gelten, ein Widerspruch zu $u_1 < u_2$. Es folgt $v(u_1) = t_1 > t_2 = v(u_2)$.
Wegen (4.44) erhalten wir

$$-1 < \frac{v(u_2) - v(u_1)}{u_2 - u_1} = \frac{t_2 - t_1}{w(t_2) - w(t_1)}$$

und damit

$$\frac{w(t_1) - w(t_2)}{t_1 - t_2} < -1.$$

Wegen $t_2 < t_1$ ist dies ein Widerspruch zu (4.45). □

Im Prinzip können wir S ermitteln, indem wir nach einer Lösung der Gleichungssystems

$$\begin{aligned} F^1(t,u) &= e^1 - c^1 + q^1 - q^1\Phi^1(t) - (e^1 - c^1 + h^1)\Phi^1(t)\Phi^2(u) \\ &\quad - (e^1 - c^1 + h^1)\int_u^{\alpha^1} \Phi^1(t - b^2(z-u))\phi^2(z)dz = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F^2(t,u) &= e^2 - c^2 + q^2 - q^2\Phi^2(u) - (e^2 - c^2 + h^2)\Phi^1(t)\Phi^2(u) \\ &\quad - (e^2 - c^2 + h^2)\int_t^{\alpha^2} \Phi^2(u - b^1(z-t))\phi^1(z)dz = 0 \end{aligned}$$

mit $\alpha^1 = u + t/b^2$ und $\alpha^2 = t + u/b^1$ suchen.
Angenommen, eine solche Lösung, sagen wir $(\tilde{t}, \tilde{u})$, existiert.
Ist $\tilde{t} < M^1$ und $\tilde{u} < M^2$, so ist $S = (\tilde{t}, \tilde{u})$.
Ist $\tilde{t} \geq M^1$, so ist $S^1 = M^1$. Existiert eine Lösung $\bar{u}$ von $F^2(M^1, u) = 0$ mit $\bar{u} < M^2$, dann ist $S^2 = \bar{u}$, sonst ist $S^2 = M^2$.
Ist andererseits $\tilde{u} \geq M^2$, so ist $S^2 = M^2$. Existiert eine Lösung $\bar{t}$ von $F^1(t, M^2) = 0$ mit $\bar{t} < M^1$, dann ist $S^1 = \bar{t}$, sonst ist $S^1 = M^1$.
Existiert $(\tilde{t}, \tilde{u})$ nicht, so kann wegen Satz 4.1 nur einer der 3 folgenden Fälle eintreten:
1. Es gibt eine Lösung $\bar{u}$ von $F^2(M^1, u) = 0$ mit $\bar{u} < M^2$, dann ist $S^2 = \bar{u}$ und $S^1 = M^1$.
2. Es gibt eine Lösung $\bar{t}$ von $F^1(t, M^2) = 0$ mit $\bar{t} < M^1$, dann ist $S^1 = \bar{t}$ und $S^2 = M^2$.
3. Sonst ist $S^1 = M^1$ und $S^2 = M^2$.

4.5 Mehrproduktsysteme

Wir wollen nun eine Variation des in Abschnitt 4.1 vorgestellten Grundmodells betrachten.
In den Arbeiten von Veinott [87] und Ignall und Veinott [35] wird ein Mehrproduktsystem betrachtet. Im Unterschied zu unserem Modell entscheidet dabei ein Spieler über die zu produzierenden Mengen aller Produkte. Er verwaltet alle Lager gleichzeitig, und sein Gewinn in jeder Stufe hängt von den Lagerbeständen und dem Bedarfsvektor ab. Es liegt also ein Markovsches Entscheidungsmodell vor. Dieses kann als Markov-Spiel mit nur einem Spieler interpretiert werden.
Eine andere Möglichkeit der Einbettung in unser Modell (1.1) wäre, das Problem als ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel anzusehen, bei dem einer der Spieler, sagen wir Spieler 2, in jedem Zustand nur eine zulässige Aktion zur Verfügung hat, also tatsächlich keine Entscheidung zu treffen ist. Die Klasse $\mathbf{\Pi}^2$ aller Strategien für Spieler 2 enthält nur ein Element. Eine optimale Strategie für Spieler 1 in diesem Spiel entspricht einer optimalen Strategie für den Entscheider im Markovschen Entscheidungsmodell.
Um die Ergebnisse aus Kapitel 3 nutzen zu können, gehen wir einen dritten Weg. Angenommen, der Entscheider verwaltet die Bestände von N Produkten. Zu Beginn einer Periode ist der Lagerbestand ein Vektor $x = (x^1, x^2, ..., x^N) \in \mathbb{R}^N$. Der Entscheider bestimmt die Höhe der Produktion, und zur Befriedigung des Bedarfes in der Periode steht ein Bestand von $y = (y^1, y^2, ..., y^N) \in \mathbb{R}^N$ zur Verfügung. Dabei gilt $y^i \geq x^i$ für jedes $i = 1, ..., N$. Die Auszahlung an den Entscheider in dieser Stufe ist

$$r(x,y) = L(y) - \sum_{j=1}^{N} c^j(y^j - x^j), \tag{4.48}$$

wobei die Funktion L und die Konstanten c^j die gleiche Bedeutung wie die entsprechenden Größen im Abschnitt 4.1 haben sollen. Wir gehen also auch hier von linearen Produktionskosten aus. Der Lagerbestand zu Beginn der folgenden Periode sei wieder $s(y, d)$ für eine gegebene Borel-meßbare Funktion $s : \mathbb{R}^N \times \mathcal{D} \to X$, wobei $d = (d^1, ..., d^M) \in \mathcal{D}$ der Bedarfsvektor in der betrachteten Stufe sei. Kurz gesagt betrachten wir das gleiche Modell wie bisher, nur dass ein übergeordneter Entscheider die Aktionen für alle Spieler auswählt.
Wir können nun ein Hilfsmodell betrachten, indem wir davon ausgehen, dass es N Entscheider bzw. Spieler gibt, von denen jeder eines der N Produkte verwaltet. Alle Spieler mögen jedoch die gleiche Gewinnfunktion gemäß (4.48) besitzen. Mit anderen Worten, die Zielfunktion aller Spieler ist die gleiche, sie hängt jedoch von N Komponenten ab, von denen jeder Spieler nur eine beeinflussen kann. Wir haben dadurch aus dem einen Lagerverwalter im Mehrproduktmodell von Ignall und Veinott künstlich N "Teilverwalter" erzeugt. Diese nehmen nun an einem "Spiel" teil, in dem es keine gegensätzlichen Interessen der Spieler gibt.
Wir betrachten also ein Spielmodell wie in Abschnitt 4.1 vorgestellt, zusätzlich nehmen wir jedoch folgendes an:

Annahme M1:
Jeder der N Spieler besitzt dieselbe Gewinnfunktion r, es sei also

$$c(a) := c^1(a) = ... = c^N(a)$$

für alle $a \in A$ und

$$L(y) := L^1(y) = ... = L^N(y)$$

für alle $y \in B$.

Mit **M1** ist nach (4.8) auch

$$G(y) := G^1(y) = ... = G^N(y) \tag{4.49}$$

für alle $y \in B$. Wir folgern aus Satz 3.2, dass unter Annahme **L1.a-c** die Existenz eines Tupels $S = (S^1, ..., S^N) \in B^1 \times ... \times B^N$ mit

$$G(S^1, ..., S^N) \geq G(S^1, ..., S^{i-1}, y^i, S^{i+1}, ..., S^N) \tag{4.50}$$

für alle $y^i \in B^i$ und alle $i = 1, ..., N$ folgt.
Aus Theorem 3.1 erhalten wir folgende

Aussage 1:
Unter den Annahmen **L1** und **M** ist jedes Strategientupel $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ mit

$$\pi_n^{i*}(h_n) = \begin{cases} \delta_{S^i} & \text{falls } x_n^i \leq S^i \\ \textit{beliebig} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.51}$$

für alle $i = 1, ..., N$ und alle $h_n = (x_0, y_0, ..., x_n) \in H_n$ ein Nash-Equilibrium für Anfangszustände aus der Menge $[m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$.
Es gilt

$$J(x, \pi^*) = G(S^1, ..., S^N)$$

für alle $x \in [m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$ und alle $i = 1, ..., N$.

Es zeigt sich, dass ein Nash-Equilibrium in diesem N-Personen-Spiel mit **M1** nicht gleichzeitig eine optimale Strategie für den Entscheider im Mehrproduktsystem sein muss. Es kann nämlich mehrere Tupel S mit (4.50) geben, die zu verschiedenen Gesamtgewinnen $J(x, \pi^*)$ führen.
Annahme **L1** führt uns also nicht direkt zu einer optimalen Strategie der Gestalt (4.51). Wir benötigen stattdessen

Annahme M2:
Es gibt ein $S = (S^1, ..., S^N) \in B^1 \times ... \times B^N$ mit

$$G(S) \geq G(y) \tag{4.52}$$

für alle $y \in B^1 \times ... \times B^N$.

Aus Annahme **M2** folgt die Gültigkeit von (4.50) für dieses S. Nehmen wir **L1.d** hinzu, so erhalten wir aus Lemma 4.1 und Theorem 3.1

Korollar 4.3. *Gelten die Bedingungen* **M2** *und* **L1.d**, *so ist jedes Strategientupel mit (4.51) ein Nash-Equilibrium für Anfangszustände aus der Menge* $[m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$.
Es gilt

$$J(x, \pi^*) = G(S) \tag{4.53}$$

für alle $x \in [m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$ *und alle* $i = 1, ..., N$.

Dieses Nash-Equilibrium ist aber gleichzeitig eine optimale Strategie für den Entscheider im Mehrproduktsystem. Folgender Satz wird in [87] für das Diskontkriterium bewiesen:

Satz 4.2. *Unter den Annahmen* **M2** *und* **L1.d** *ist jede Strategie mit (4.51) optimal für Anfangszustände aus der Menge* $[m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$.

Beweis. Wegen (3.5), der Kompaktheit von X und (4.52) ist

$$J(x, \pi) = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{m=0}^{n-1} G(A_m^1, ..., A_m^N) \leq G(S) = J(x, \pi^*)$$

für alle $\pi \in \mathbf{\Pi}$ und alle $x \in [m^1, S^1] \times ... \times [m^N, S^N]$, also ist π^* optimal bezüglich des Durchschnittsgewinns. $\square$

Mit Korollar 4.2 folgern wir außerdem

Korollar 4.4. *Unter den Annahmen* **M2**, **L1.d** *und* **L2** *ist die Strategie* $\pi^* = (\pi^{1*}, ..., \pi^{N*}) \in \mathbf{\Pi}$ *mit*

$$\pi_n^{i*}(h_n) = \begin{cases} \delta_{S^i} & \textit{falls } x_n^i \leq S^i \\ \delta_{x_n^i} & \textit{falls } x_n^i > S^i \end{cases}$$

für alle $i = 1, ..., N$ *und alle* $h_n = (x_0, y_0, ..., x_n) \in H_n$ *optimal bezüglich* X *für den Entscheider im Mehrproduktsystem.*
Es gilt

$$J(x, \pi^*) = G(S)$$

für alle $x \in X$ *und alle* $i = 1, ..., N$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.2 ist

$$J(x, \pi) \leq G(S) = J(x, \pi^*)$$

für alle $\pi \in \mathbf{\Pi}$ und alle $x \in X$, also ist π^* optimal. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] E. Altman, A. Hordijk, und F.M. Spieksma, *Contraction conditions for average and α-discount optimality in countable state Markov games with unbounded rewards*, Mathematics of Operations Research **22** (1997), 588–618.

[2] K.J. Arrow, T. Harris, und J. Marschak, *Optimal inventory policy*, Econometrica **19** (1951), 250–272.

[3] K.J. Arrow, S. Karlin, und H. Scarf, *Studies in the mathematical theory of inventory and production*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1958.

[4] J.P. Aubin, *Optima and equilibria*, Springer, Berlin, 1998.

[5] M.Z. Avşar und M.B. Baykal-Gürsoy, *Inventory control under substitutable demand: A stochastic game application*, Naval Research Logistics **49** (2002), 359–375.

[6] S.X. Bai und Y.-K. Tsai, *A production control problem in competition*, Computers & Mathematics with Applications **29** (1995), 65–80.

[7] D. Bartmann und M.J. Beckmann, *Lagerhaltung*, Springer, Heidelberg, 1989.

[8] E. Behrends, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, Berlin, 1987.

[9] R. Bellman, *Dynamic programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

[10] C. Berge, *Topological spaces. Including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity. Translated from the french original by E. M. Patterson*, Dover Publications, Mineola, NY, 1997.

[11] D.P. Bertsekas und S.E. Shreve, *Stochastic optimal control: the discrete time case*, Academic Press, New York, 1978.

[12] D. Beyer und S.P. Sethi, *The classical average-cost inventory models of Iglehart and Veinott-Wagner revisited*, Journal of Optimization Theory and Applications **101** (1999), 523–555.

[13] D. Beyer, S.P. Sethi, und R. Sridhar, *Stochastic multiproduct inventory models with limited storage*, Journal of Optimization Theory and Applications **111** (2001), 553–588.

[14] ———, *Average-cost optimality of a base-stock policy for a multi-product inventory model with limited storage*, Decision & Control in Management Science (G. Zaccour, ed.), Advances in Computational Management Science, vol. 4, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.

[15] D. Blackwell und T. Ferguson, *The big match*, Annals of Mathematical Statistics **39** (1968), 159–163.

[16] V.S. Borkar und M.K. Ghosh, *Denumerable state stochastic games with limiting average payoff*, Journal of Optimization Theory and Applications **76** (1993), 539–560.

[17] L.D. Brown und R. Purves, *Measurable selections of extrema*, Annals of Statistics **1** (1973), 902–912.

[18] R. Cavazos-Cadena, *A counterexample on the optimality equation in Markov decision chains with the average cost criterion*, Systems & Control Letters **16** (1991), 387–392.

[19] K. Fan, *Minimax theorems*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A. **39** (1953), 42–47.

[20] J.A. Filar und O.J. Vrieze, *Competitive Markov decision processes*, Springer, New York, 1997.

[21] A.M. Fink, *Equilibrium in a stochastic n-person game*, Journal of Science in Hiroshima University, Series A-I **28** (1964), 89–93.

[22] M.K. Ghosh und A. Bagshi, *Stochastic games with average payoff criterion*, Applied Mathematics and Optimization **38** (1998), 283–301.

[23] D. Gillette, *Stochastic games with zero stop probabilities*, Contributions to the Theory of Games, vol. 3, pp. 179–187, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

[24] H.-J. Girlich, *Optimal decision rules*, Sequential methods in statistics, Banach Center Publications, vol. 16, PWN, Warsaw, 1985.

[25] ______, *On the optimal inventory equation in the minimax case*, Inventory in theory and practice, Studies in Production and Engineering Economics, vol. 6, Elsevier, Amsterdam, 1986.

[26] H.-J. Girlich, P. Köchel, und H.-U. Küenle, *Steuerung dynamischer Systeme*, Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, 1990.

[27] E. Gordienko und O. Hernández-Lerma, *Average cost Markov control processes with weigthed norms: existence of canonical policies*, Applicationes Mathematicae (Warsaw) **23** (1995), 199–218.

[28] O. Hernández-Lerma und J.B. Lasserre, *Discrete-time Markov control processes: basic optimality criteria*, Springer, New York, 1996.

[29] ______, *Further topics on discrete-time Markov control processes*, Springer, New York, 1999.

[30] ______, *Zero-sum stochastic games in Borel spaces: average payoff criteria*, SIAM Journal on Control and Optimization **39** (2000), 1520–1539.

[31] O. Hernández-Lerma und O. Vega-Amaya, *Infinite-horizon Markov control processes with undiscounted cost criteria: from average to overtaking optimality*, Applicationes Mathematicae (Warsaw) **25** (1998), 153–178.

[32] D.P. Heyman und M.J. Sobel, *Stochastic models in operations research, vol. ii*, McGraw-Hill, New York, 1984.

[33] D.L. Iglehart, *Dynamic programming and stationary analysis of inventory problems*, Multistage Inventory Models and Techniques, Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.

[34] ______, *Optimality of (s, S) policies in the infinite horizon dynamic inventory problem*, Management Science **9** (1963), 259–267.

[35] E. Ignall und A. Veinott, *Optimality of myopic inventory policies for several substitue products*, Management Science **18** (1969), 284–304.

[36] A. Jaśkiewicz, *Private Korrespondenz.*

[37] A. Jaśkiewicz und A.S. Nowak, *On the optimality equation for zero-sum ergodic stochastic games*, Mathematical Methods of Operations Research **54** (2001), 291–301.

[38] E.L. Johnson, *Optimality and computation of (σ, S) policies in the multi-item infinite-horizon onventory problem*, Managemment Science **13** (1967), 475–491.

[39] D. Kalin, *On the optimality of (σ, S) policies*, Mathematics of Operations Research **5** (1980), 293–307.

[40] A.P. Kirman und M.J. Sobel, *Dynamic oligopoly with inventories*, Econometrica **42** (1974), 279–287.

[41] P. Köchel, *A note on "Myopic solutions of Markov decision processes and stochastic games"*, Operations Research **33** (1985), 1394–1398.

[42] H.-U. Küenle, *Stochastische Spiele und Entscheidungsmodelle*, Teubner-Texte zur Mathematik 89, Teubner-Verlag, Leipzig, 1986.

[43] ______, *Markov games under a geometric drift condition*, Tech. report, Department of Mathematics, Technical University Cottbus, Germany, 2000.

[44] ______, *Stochastic games with complete information and average cost criteria*, Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games 5, Birkhäuser, Boston, 2000, pp. 325–338.

[45] ______, *On multichain Markov games*, Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games 6, Birkhäuser, Boston, 2001, pp. 147–163.

[46] H.-U. Küenle und R. Schurath, *The optimality equation and ε-optimal strategies in Markov games with average reward criterion*, Mathematical Methods of Operations Research **56** (2002), 451–472.

[47] M. Kurano, *Average cost Markov decision processes under the hypothesis of Doeblin*, Annals of Operations Research **29** (1991), 375–386.

[48] R. Levitan und M. Shubik, *Price variation duopoly with differentiated products and random demand*, Journal of Economic Theory **3** (1971), 23–39.

[49] L. Li, *The role of inventory in delivery-time competition*, Management Science **38** (1992), 182–197.

[50] A. Maitra und T. Parthasarathy, *On stochastic games*, Journal of Optimization Theory and Applications **5** (1970), 289–300.

[51] A. Maitra und W. Sudderth, *Borel stochastic games with lim sup payoff*, Annals of Probability **21** (1993), 861–885.

[52] J.-F. Mertens und A. Neyman, *Stochastic games*, International Journal of Game Theory **10** (1981), 53–66.

[53] T. Mertens, J.-F. und Parthasarthy, *Equilibria for discounted stochastic games*, Core discussion paper, Université Catholique de Louvain, 1987.

[54] K. Meyberg und P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 1*, Springer, Berlin, 1997.

[55] S.P. Meyn und R.L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer, New York, 1993.

[56] J.F. Nash, *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A. **36** (1950), 48–49.

[57] ______, *Noncooperative games*, Annals of Mathematics **54** (1951), 286–295.

[58] H. Nikaido und K. Isoda, *Note on non-cooperative convex games*, Pacific Journal of Mathematics **5** (1955), 807–815.

[59] A.S. Nowak, *Existence of equilibrium stationary strategies in discounted noncooperative stochastic games with uncountable state space*, Journal of Optimization Theory and Applications **45** (1985), 591–602.

[60] ______, *Measurable selection theorems for minimax stochastic optimization problems*, SIAM Journal on Control and Optimization **23** (1985), 466–476.

[61] ______, *Universally measurable strategies in zero-sum stochastic games*, Annals of Probability **13** (1985), 269–287.

[62] ______, *Stationary equilibria for non-zero-sum average payoff ergodic stochastic games with general state space*, Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games 1, Birkhäuser, Boston, 1994, pp. 231–246.

[63] ———, *Zero-sum average payoff stochastic games with general state space*, Games and Economic Behavior **7** (1994), 221–232.

[64] ———, *Optimal strategies in a class of zero-sum ergodic stochastic games*, Mathematical Methods of Operations Research **50** (1999), 399–420.

[65] A.S. Nowak und E. Altman, *ϵ-Equilibria for stochastic games with uncountable state space and unbounded costs*, SIAM Journal on Control and Optimization **40** (2002), 1821–1839.

[66] A.S. Nowak und T.E.S. Raghavan, *Existence of stationary correlated equilibria with symmetric information for discounted stochastic games*, Mathematics of Operations Research **17** (1992), 519–526.

[67] G. Owen, *Existence of equilibrium pairs in continuous games*, International Journal of Game Theory **5** (1976), no. 2–3, 97–105.

[68] M. Parlar, *Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands*, Naval Research Logistics **35** (1988), 397–409.

[69] T. Parthasarathy, S.H. Tijs, und O.J. Vrieze, *Stochastic games with state independent transitions and separable rewards*, Selected topics in operations research and mathematical economics, pp. 262–271, Springer, New York, 1984.

[70] E.L. Porteus, *Stochastic inventory theory*, Stochastic Models (D.P. Heyman und M.J. Sobel, eds.), Handbook in Operations Research and Management Science, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[71] M.L. Puterman, *Markov decision processes*, Stochastic Models (D.P. Heyman und M.J. Sobel, eds.), Handbook in Operations Research and Management Science, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[72] B. Rauhut, N. Schmitz, und E.-W. Zachow, *Spieltheorie*, Teubner, Stuttgart, 1979.

[73] U. Rieder, *Measurable selection theorems for optimization problems*, Manuscripta Mathematica **24** (1978), 115–131.

[74] ———, *Equilibrium plans for non-zero-sum Markov games*, Game theory and related topics, pp. 91–102, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[75] ———, *Average optimality in Markov games with general state space*, Proceedings of the 3rd International Conference on Approximation Theory and Optimization, Puebla, México, 1995.

[76] H. Scarf, *On the optimality of (s, S) policies in the dynamic inventory problem*, Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University Press, Stanford, CA, 1960.

[77] M. Schäl, *Conditions for optimality and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete **32** (1975), 179–196.

[78] R. Schurath, *On a two-player production-inventory problem*, Tech. report, Department of Mathematics, Technical University Cottbus, Germany, 2000.

[79] L.I. Sennott, *Nonzero-sum stochastic games with unbounded costs: discounted and average cost cases*, ZOR. Mathematical Methods of Operations Research **40** (1994), 145–162.

[80] ———, *Zero-sum stochastic games with unbounded costs: discounted and average cost cases*, ZOR. Mathematical Methods of Operations Research **39** (1994), 209–225.

[81] L.S. Shapley, *Stochastic games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A. **39** (1953), 1095–1100.

[82] S. Simons, *Minimax theorems and their proofs*, Nonconvex Optimization and its Applications 4, pp. 1–23, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[83] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific Journal of Mathematics **8** (1958), 171–176.

[84] M.J. Sobel, *Myopic solutions of Markov decision processes and stochastic games*, Operations Research **29** (1981), 995–1009.

[85] E. van Damme, *Stability and perfection of Nash equilibria. Second edition*, Springer, New York, 1991.

[86] O. Vega-Amaya, *The average cost optimality equation: a fixed point approach*, Reporte de Investigación No. 4 (2001), Departmento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.

[87] A. Veinott, *Optimal policy for a multi-product, dynamic, nonstationary inventory problem*, Management Science **12** (1965), 206–222.

[88] A.F. Veinott und H. Wagner, *Computing optimal (s, S) inventory policies*, Management Science **11** (1965), 525–552.

[89] N. Vieille, *The existence of equilibrium payoffs in two-player stochastic games*, Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games 6, Birkhäuser, Boston, 2001, pp. 101–118.

[90] W. Whitt, *Representation and approximation of noncooperative sequential games*, SIAM Journal on Control and Optimization **18** (1980), 33–48.

Verzeichnis wichtiger Bezeichnungen und Symbole

Annahmen

Theoreme, Sätze und Lemmata

Wichtige Symbole

Lebenslauf

Name:	Ronald Schurath
Anschrift:	Glatzer Str. 4a 10247 Berlin
Geburtsdatum:	11. Februar 1970
Geburtsort:	Dresden
Familienstand:	ledig
Schulbildung:	1976 - 1986 Oberschule “Johann Wolfgang von Goethe“ in Forst 1986 - 1988 Spezialschule Mathematik/Physik der Humboldt-Universität zu Berlin, Abschluss Abitur
Hochschulstudium:	1990 -1997 Mathematik (Diplom) an der Humboldt-Universität zu Berlin Spezialisierungsrichtung: Mathematische Statistik Nebenfach: Informatik
Praktika:	Februar - März 1995: Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen April - September 1995: Max-Delbrück-Centrum für Molekulare Medizin
Berufstätigkeit:	seit 1997 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus, Lehrstuhl Mathematische Modellierung
Weiteres:	als Schüler erfolgreiche Teilnahme an Mathematik - Olympiaden Nov. 1988 - Jan. 1990 Ableistung des Grundwehrdienstes 1994 Teilnahme an einem sechswöchigen Sprachkurs an der University of Illinois (mit DAAD-Stipendium) 1995/96 Stelle als studentische Hilfskraft (Programmierung in S-Plus, Fortran)

Cottbus, 10.09.2002

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Dissertation selbständig verfasst und alle in Anspruch genommenen Hilfen in der Dissertation angegeben habe.
Es wurde von mir bisher kein Promotionsantrag gestellt.
Die Veröffentlichung der Dissertation verletzt keine bestehenden Schutzrechte.

Ronald Schurath